Def: Uma equação diferencial ordinária é uma equação

$$(*) \quad x^{(k)} = F(t, x, x', x'', \dots, x^{(k-1)}), \text{ onde:}$$

$F: U \to \mathbb{R}^d$ contínua

$U \subset \mathbb{R}^{1+dk}$, aberto, $t \in \mathbb{R}$, $x, x', x'', \dots, x^{(k-1)}, x^{(k)} \in \mathbb{R}^d$

k = ordem da equação diferencial

d = dimensão da equação diferencial

Uma solução de $(*)$ é uma curva $\gamma: I \to \mathbb{R}^d$, k vezes diferenciável tal que:

i) I é um intervalo

ii) $\left(t, \gamma(t), \frac{d\gamma}{dt}(t), \dots, \frac{d^{k-1}\gamma}{dt^{k-1}}(t)\right) \in U, \ \forall t \in I$.

iii) $F\left(t, \gamma(t), \frac{d\gamma}{dt}(t), \dots, \frac{d^{k-1}\gamma}{dt^{k-1}}(t)\right) = \frac{d^k\gamma}{dt^k}(t), \ \forall t \in I$.

Exemplo importante: oscilador harmônico

$$\boxed{\begin{array}{l} x'' + kx = 0 \\ x(0) = x_0, \ x'(0) = v_0 \end{array}}$$

* Caso $k = 0$: $\quad x'' = 0 \Rightarrow x(t) = v_0 \cdot t + x_0$

* Caso $k > 0$: $\quad x(t) = x_0 \cdot \cos(\sqrt{k}t) + v_0/\sqrt{k} \cdot \operatorname{sen}(\sqrt{k}t) \Rightarrow x(0) = x_0$

$$x'(t) = -x_0\sqrt{k}\,\operatorname{sen}(\sqrt{k}t) + \frac{v_0}{\sqrt{k}} \cdot \sqrt{k}\cos(\sqrt{k}t) \Rightarrow x'(0) = v_0$$

$$x''(t) = -x_0 \cdot k\,\operatorname{sen}(\sqrt{k}t) - \frac{v_0}{\sqrt{k}} \cdot k\,\operatorname{sen}(\sqrt{k}t) = -k\,x(t).$$

⊗ Caso $k<0$: $x(t) = c_1 e^{\sqrt{k}t} + c_2 e^{-\sqrt{k}t}$, onde

$$c_1 = \frac{\sqrt{k}x_0 + v_0}{2\sqrt{k}} \quad \text{e} \quad c_2 = \frac{\sqrt{k}x_0 - v_0}{2\sqrt{k}}.$$

Tópicos de Revisão:

1) **Regra de Leibniz**: dado $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $f: U \times [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua e tal que a i-ésima derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x,t)$ existe para todo $(x,t) \in U \times [a,b]$ e a função $\frac{\partial f}{\partial x_i}: U \times [a,b] \to \mathbb{R}$ assim definida é contínua.

Então a função $\varphi: U \to \mathbb{R}$ definida por:

$$\varphi(x) = \int_a^b f(x,t)\,dt,$$

possui i-ésima derivada parcial em cada ponto $x \in U$, sendo

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x_i}(x,t)\,dt.$$

Em suma, pode-se derivar sob o sinal de integral, desde que o integrando seja contínuo.

dem: Ver Elon (vol. 2).

2) **Teorema do ponto fixo das contrações**:

Seja (X,d) um espaço métrico completo e $T: X \to X$ uma contração (i.e., existe $\lambda \in (0,1)$ tal que $d(Tx,Ty) \leq \lambda d(x,y)$, $\forall x,y \in X$). Então T possui um único ponto fixo $x_0 \in X$ (i.e., $Tx_0 = x_0$) e, $\forall x \in X$, tem-se $\lim_n T_x^n = x_0$. (Aqui $T_x^n = \underbrace{T(T(\cdots T(x))\ldots)}_{n\text{-vezes}}$).

3) Redução de ordem:

Considere a EDO $x^{(k)} = f(t, x, x', \dots, x^{(k-1)})$.

Escreva $X = (X_1, \dots, X_k) = (x, x', \dots, x^{(k-1)})$.

Então, se $F(t,X) := (X_2, X_3, \dots, X_{k-1}, f(t,X))$

vale: $X' = F(t,X)$.

De fato, $X' = (X_2', \dots, X_k') = (x', x'', \dots, x^{(k)})$

$$= (\underbrace{x'}_{=X_1}, \underbrace{x''}_{=X_2}, \dots, \underbrace{x^{(k-1)}}_{=X_{k-1}}, \underbrace{f(t, x, x', \dots, x^{(k-1)})}_{=f(t,X)})$$

Agora, se $x \in \mathbb{R}^d$, então:

$X', X \in \mathbb{R}^{dk}$, e $F: \tilde{U} \subset \mathbb{R}^{1+dk} \longrightarrow \mathbb{R}^{dk}$,

enquanto antes $f: U \subset \mathbb{R}^{1+dk} \longrightarrow \mathbb{R}^d$. Ou seja, aumentamos o contradomínio de f.

Exemplo: •) $x'' = f(t, x, x')$ $f: U \subseteq \mathbb{R}^{1+2} \longrightarrow \mathbb{R}$

Define $X = (x, x')$ e $F(t,X) = (x', f(t, x, x'))$

$X' = (x', x'')$. Como $f(t, x, x') = x''$,

$X' = F(t,X)$. Note, $F: \tilde{U} \subseteq \mathbb{R}^{1+2} \to \mathbb{R}^2$

•) Se $f(t, x, x') = -x$, isto é, $x'' = -x$, podemos

definir $(\alpha, \beta) = X = (x, x')$, $F(t,X) = F(t, \alpha, \beta)$

$= (x', f(t, x, x'))$

$= (\beta, x'') = (\beta, -x)$

$= (\beta, -\alpha)$

Daí, a eq fica $X' = F(t,X) \iff$

$$\begin{cases} \alpha' = \beta \\ \beta' = -\alpha \end{cases}$$