Campos de Vetores

Seja $F: U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$

um campo de vetores em $\mathbb{R}^n$, i.e., uma função C^r $(r \geq 0)$ definida em um aberto $U \subset \mathbb{R}^n$. Considerando a base canônica $\{e_1, \dots, e_n\}$ de $\mathbb{R}^n$, podemos escrever:

$$F(p) = \sum_{i=1}^{n} a_i(p) \cdot e_i, \quad \forall p \in U,$$

onde cada função $a_i: U \to \mathbb{R}$ tem a mesma classe de diferenciabilidade que F.

Existem muitas maneiras de estudar campos de vetores. Abordaremos algumas: derivadas direcionais / germes de funções / derivações em um ponto.

Seja $f: U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função C^r $(r \geq 1)$.

Dado um ponto $p \in \mathbb{R}^n$ e um vetor $v \in \mathbb{R}^n$, com $p = (p_1, \dots, p_n)$ e $v = (v_1, \dots, v_n)$, consideramos o caminho $c: (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow U \subset \mathbb{R}^n$ definido por: $c(t) = p + tv = (p_1 + tv_1, \dots, p_n + tv_n)$.

Definimos a derivada direcional de f, no ponto p, na direção de v, por:

$$D_v f = \lim_{t \to 0} \frac{f(c(t)) - f(p)}{t} = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(c(t))$$

$$\Rightarrow D_v f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) \cdot \frac{d\, c_i(0)}{dt} = \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(p),$$

pois $c(0) = p$ e $c'(0) = (v_1, \dots, v_n) = v$.

Se considerarmos funções $f \in C^\infty(U) = \{ f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \mid f$ é de classe $C^\infty \}$, podemos definir, para p e v fixados ($p = (p_1, \dots, p_n)$ e $v = (v_1, \dots, v_n)$), o operador $D_v : C^\infty(U) \to \mathbb{R}$ por

$$D_v f = \sum v_i \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} f(p), \quad \forall f \in C^\infty(U).$$

ou seja:

$$D_v = \sum v_i \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_p .$$

Observe que, se duas funções coincidem em alguma vizinhança de um ponto $p \in \mathbb{R}^m$, então elas possuem exatamente as mesmas derivadas direcionais em p.

Considere o conjunto dos pares (f, U), onde $U \subseteq \mathbb{R}^n$ é um aberto contendo p e $f : U \to \mathbb{R}$ é uma função de classe C^∞.

Definimos a seguinte relação de equivalência: dizemos que (f, U) é equivalente a (g, V) se existe um aberto W, com:

$$p \in W \subset U \cap V,$$

tal que $f|_W = g|_W$. Isso é uma relação de equivalência (prove!) e a classe de (f, U) é o que chamamos do germe de f em p. Escrevemos $C_p^\infty(\mathbb{R}^n)$ (ou simplesmente C_p^∞) o conjunto de todos os germes de funções C^∞ de $\mathbb{R}^n$ em p.

Uma álgebra sobre um corpo $\mathbb{K}$ é um $\mathbb{K}$-espaço vetorial A munido de uma operação de multiplicação $\mu : A \times A \longrightarrow A$ (escrevemos $\mu(a,b) = a \cdot b$) que satisfaz:

(i) associatividade: $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$

(ii) distributividade: $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$
$(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$,

(iii) homogeneidade: $r(a \cdot b) = (ra) \cdot b = a \cdot (rb)$

$\forall a,b,c \in A$ e $\forall r \in \mathbb{K}$.

Um homomorfismo de álgebras é uma aplicação:

$$\varphi : A \longrightarrow A',$$

com A e A' $\mathbb{K}$-álgebras, que é linear e $\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$, $\forall a,b \in A$.

Fato: (prove!!) C_p^∞ munido da soma, multiplicação e multiplicação por escalares provenientes das funções $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, é uma álgebra.

Dizemos que uma transformação linear $D: C_p^\infty \to \mathbb{R}$ é uma derivação em p se ela satisfaz a regra de Leibniz, isto é,

$$D(f \cdot g) = D(f) \cdot g(p) + f(p) \cdot D(g),$$

$\forall f, g \in C_p^\infty$.

<u>Exemplo:</u> derivada direcional! Dado $v \in \mathbb{R}^n$,

$D_v : C_p^\infty \to \mathbb{R}$ definida por $D_v f = \sum_{i=1}^n v_i \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} f(p)$

satisfaz a regra de Leibniz (pois cada $\frac{\partial}{\partial x_i}$ satisfaz):

$$D_v(f \cdot g) = D_v(f) \cdot g(p) + f(p) \cdot D_v(g).$$

Observe que $\mathcal{D}_p(\mathbb{R}^n) = \{$derivações em $p\}$ é um espaço vetorial e que:

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathcal{D}_p(\mathbb{R}^n) \\ v &\longmapsto D_v = \sum_{i=1}^n v_i \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p \end{aligned}$$

prove!

é isomorfismo de espaço vetoriais.

Então, podemos pensar em vetores como operadores! Mais precisamente, do ponto de vista de espaços vetoriais, vetores de $\mathbb{R}^n$ e derivações são a mesma coisa!

Note que φ manda e_i em $\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p$, de modo que o conjunto $\left\{\left.\frac{\partial}{\partial x_1}\right|_p, \dots, \left.\frac{\partial}{\partial x_n}\right|_p\right\}$ é uma base para $\mathcal{D}_p(\mathbb{R}^n)$.

Usando essa identificação podemos escrever (por abuso) um vetor $v = \sum_{i=1}^{n} v_i \cdot e_i \in \mathbb{R}^n$ como:

$$v = \sum v_i \cdot \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p .$$

Voltamos a olhar para $F: U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Então, $F(p) \in \mathbb{R}^n$ para cada $p \in U$. Pelo o que acabamos de falar de $F(p)$ como uma derivação $(\in \mathcal{D}_p(\mathbb{R}^n))$. Para facilitar a notação, $F(p) := F_p$.

Usando o isomorfismo φ acima, escrevemos

$$F_p = F(p) = \sum_{i=1}^{n} a_i(p) \cdot e_i \approx \sum_{i=1}^{n} a_i(p) \cdot \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p$$

Variando $p \in U$ escrevemos $F = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}$.

Se $f \in C^\infty(U)$, então definimos fF por

$$(fF)_p = f(p) \cdot F_p .$$

É claro que, se $f \in C^\infty(U)$ então $fF = \sum_{i=1}^{n} (f \cdot a_i) \frac{\partial}{\partial x_i}$ é ainda um campo de classe C^∞.

comutativo com unidade

Um módulo M sobre um anel R é um R-espaço vetorial, isto é, M é um grupo munido de uma operação $\mu: R \times M \to M$ associativa, distributiva e tal que, se $1 \in R$ é a identidade, então $1 . m = m$, $\forall m \in M$.

Se R é um corpo, então um R-módulo é exatamente um R-espaço vetorial!

Como $C^\infty(U)$ é um anel comutativo com unidade, o conjunto de todos os campos vetoriais C^∞ é um módulo sobre $C^\infty(U)$. O denotamos por: $\mathfrak{X}(U)$.

Da maneira natural define-se homomorfismo de módulos.

Seja $X \in \mathfrak{X}(U)$ um campo vetorial de classe C^∞ definido no aberto $U \subseteq \mathbb{R}^n$ e $f \in C^\infty(U)$. Dado um ponto $p \in U$, podemos pensar em X_p como uma derivação em f e definir uma nova função $Xf : U \to \mathbb{R}$ por:

$$(Xf)(p) := X_p(f) \, ,$$

para $p \in U$.

Ainda: $(Xf)(p) = \sum_{i=1}^{n} a_i(p) \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)$. (portanto, Xf é de fato uma função $U \to \mathbb{R}$ de classe C^∞)

Portanto, um campo C^∞, $X \in \mathfrak{X}(U)$, nos dá uma aplicação linear:

$$\begin{aligned} C^\infty(U) &\longrightarrow C^\infty(U) \\ f &\longmapsto Xf \end{aligned}$$

Exercício: Dados $X \in \mathfrak{X}(U)$ e $f, g \in C^\infty(U)$, mostre que X satisfaz a regra de Leibniz, ou seja, que

$$X(fg) = X(f)\, g + f \cdot X(g).$$

Uma derivação de uma $\mathbb{K}$-álgebra A, é um mapa $\mathbb{K}$-linear $D : A \to A$ que satisfaz Leibniz:

$$D(a \cdot b) = (Da)\, b + a \cdot (Db) \, , \quad \forall a, b \in A.$$

Fato: o conjunto de todas as derivações em A formam
(prove!)
um espaço vetorial e o denotamos por $\mathrm{Der}(A)$.

Observe que um campo C^∞ sobre um aberto $U \subseteq \mathbb{R}^n$ nos dá prontamente, uma derivação na álgebra $C^\infty(U)$.
Portanto, temos um mapa:

$$\begin{aligned} \Psi : \mathfrak{X}(U) &\longrightarrow \mathrm{Der}(C^\infty(U)) \\ X &\longmapsto (f \mapsto Xf) \end{aligned}$$

Exercício: Mostre que Ψ é um ISOMORFISMO de espaços vetoriais.

Obs: Uma derivação em p é uma aplicação $D : C_p^\infty \to \mathbb{R}$.

Uma derivação da álgebra C_p^∞ é uma aplicação $D : C_p^\infty \to C_p^\infty$.

Referência:

$\boxed{\text{Tu - An Intro. to Manifolds (Cap 1 - Sec 1 e 2)}}$