EDO's no plano e seus retratos de fase

Vamos buscar soluções explícitas para o seguinte P.V.I.:

$$(\star)\begin{cases} x' = A\cdot x \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

onde $A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

1. A está na forma de Jordan

2. A é arbitrária.

1 Dada uma matriz A, temos alguns casos a tratar: (1.a) A possui dois autovalores reais λ_1, λ_2 distintos

(1.b) A possui dois autovalores reais iguais

$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \in \mathbb{R}$. Se $E_\lambda = \ker(A - \lambda Id)$, então:

(1.b.i) $\dim E_\lambda = 2$

(1.b.ii) $\dim E_\lambda = 1$

(1.c) A possui um (e portanto dois) autovalores complexos: $\lambda = a+bi$, $a, b \in \mathbb{R}$ e $b \neq 0$ e $\bar{\lambda} = a - bi$.

Em cada caso temos as seguintes formas de Jordan:

$$(1.a) \longleftrightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

$$(1.b.i) \longleftrightarrow \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$(1.b.ii) \longleftrightarrow \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$(1.c) \longleftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

Vamos resolver o P.V.I. (✪) em cada um dos casos:

(1.a) $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ $\lambda_1 \neq \lambda_2$
$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

Considere autovetores v_1, v_2 associados a λ_1 e λ_2, respectivamente. Como $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\langle v_1, v_2 \rangle = \mathbb{R}^2$.

Afirmação: Se $x_0 = c_1 v_1 + c_2 v_2$, a única solução do PVI (✪) no caso (1.a) é dada por:

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 . t} \cdot v_1 + c_2 \cdot e^{\lambda_2 t} \cdot v_2.$$

De fato, $x(0) = c_1 v_1 + c_2 v_2 = x_0$ e

$$x'(t) = c_1 . \lambda_1 e^{\lambda_1 t} . v_1 + c_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 t} . v_2$$
$$= c_1 e^{\lambda_1 t} . \lambda_1 v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} . \lambda_2 v_2$$
$$= c_1 e^{\lambda_1 t} . A v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} A v_2$$
$$= A \left(c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2 \right)$$
$$= A . x(t).$$

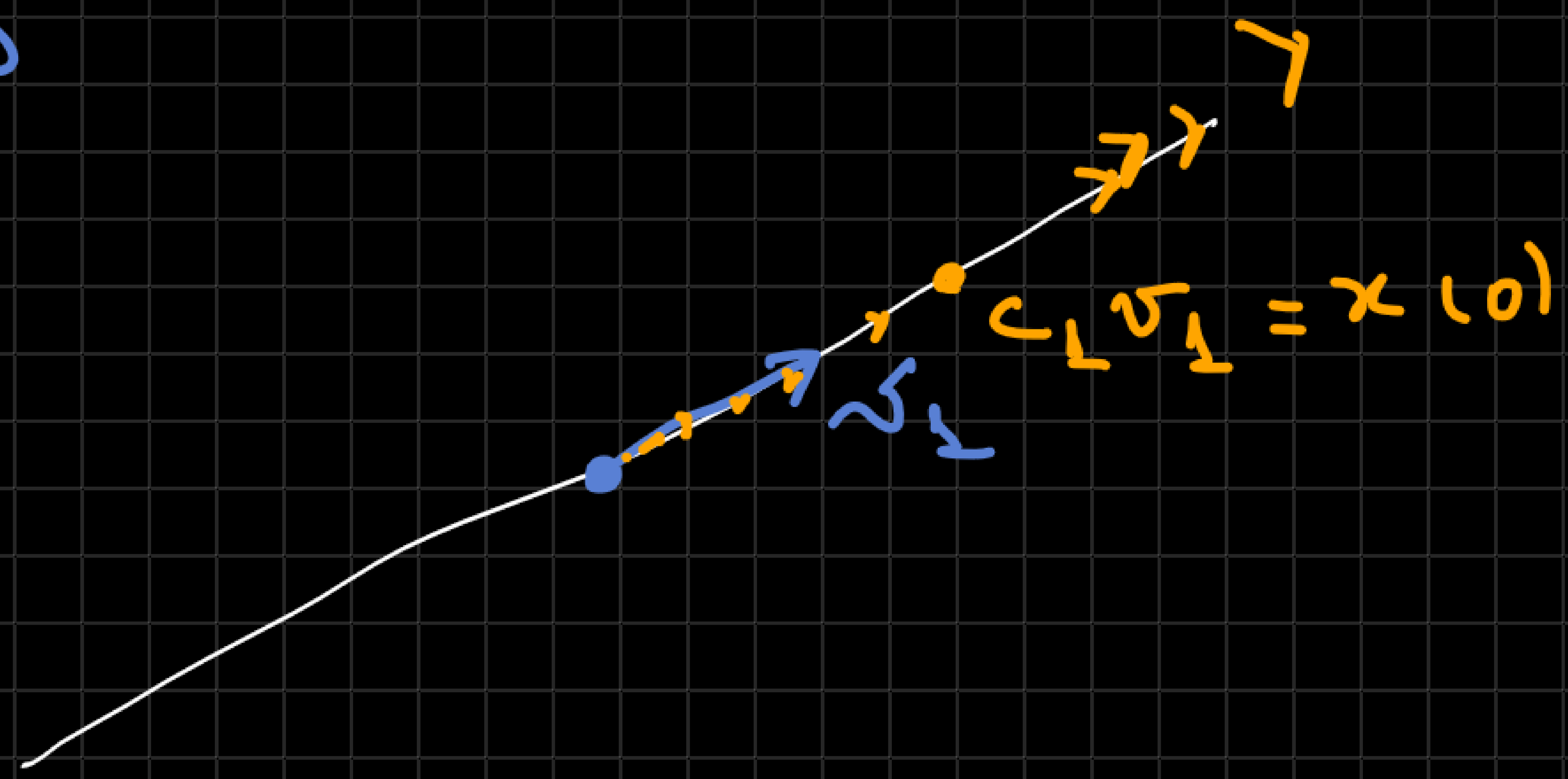
Como se comporta $x(t)$ no plano $\mathbb{R}^2$:

Suponha $0 < \lambda_1 < \lambda_2$.

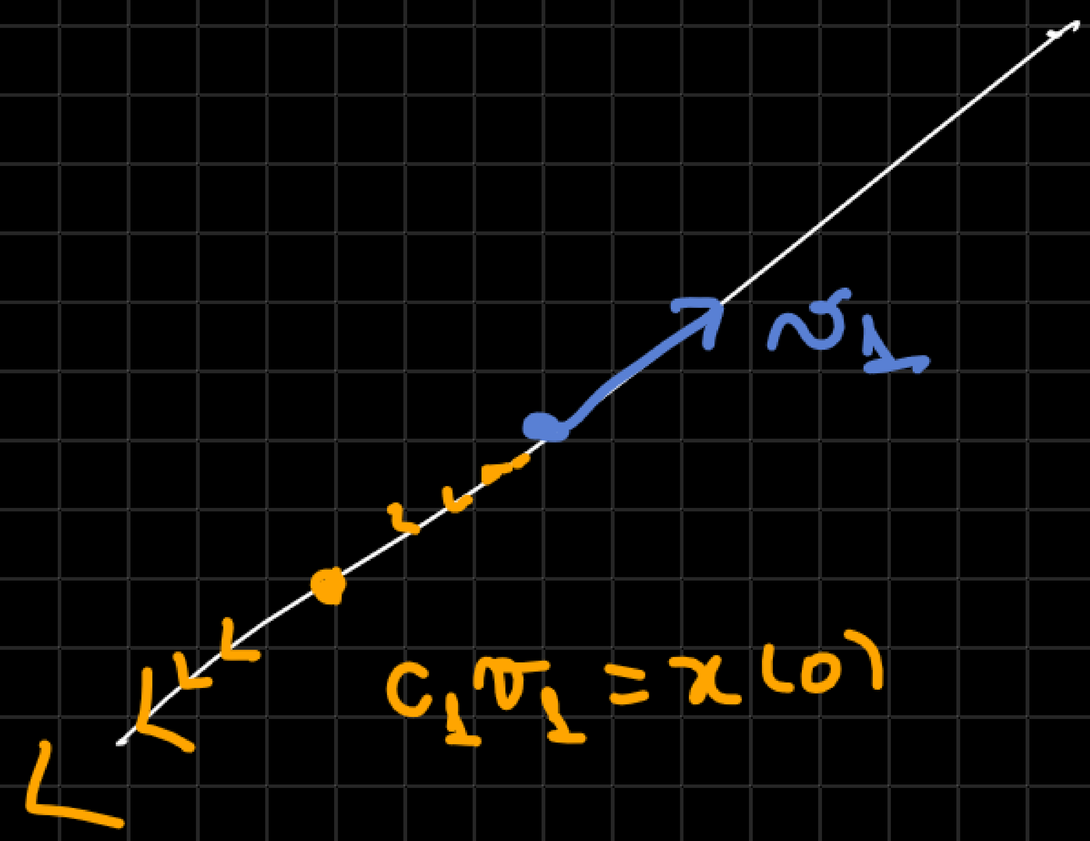
$x_0 = c_1 v_1 + c_2 v_2$

Se $c_2 = 0 \Rightarrow x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \cdot v_1$.

$c_1 > 0$

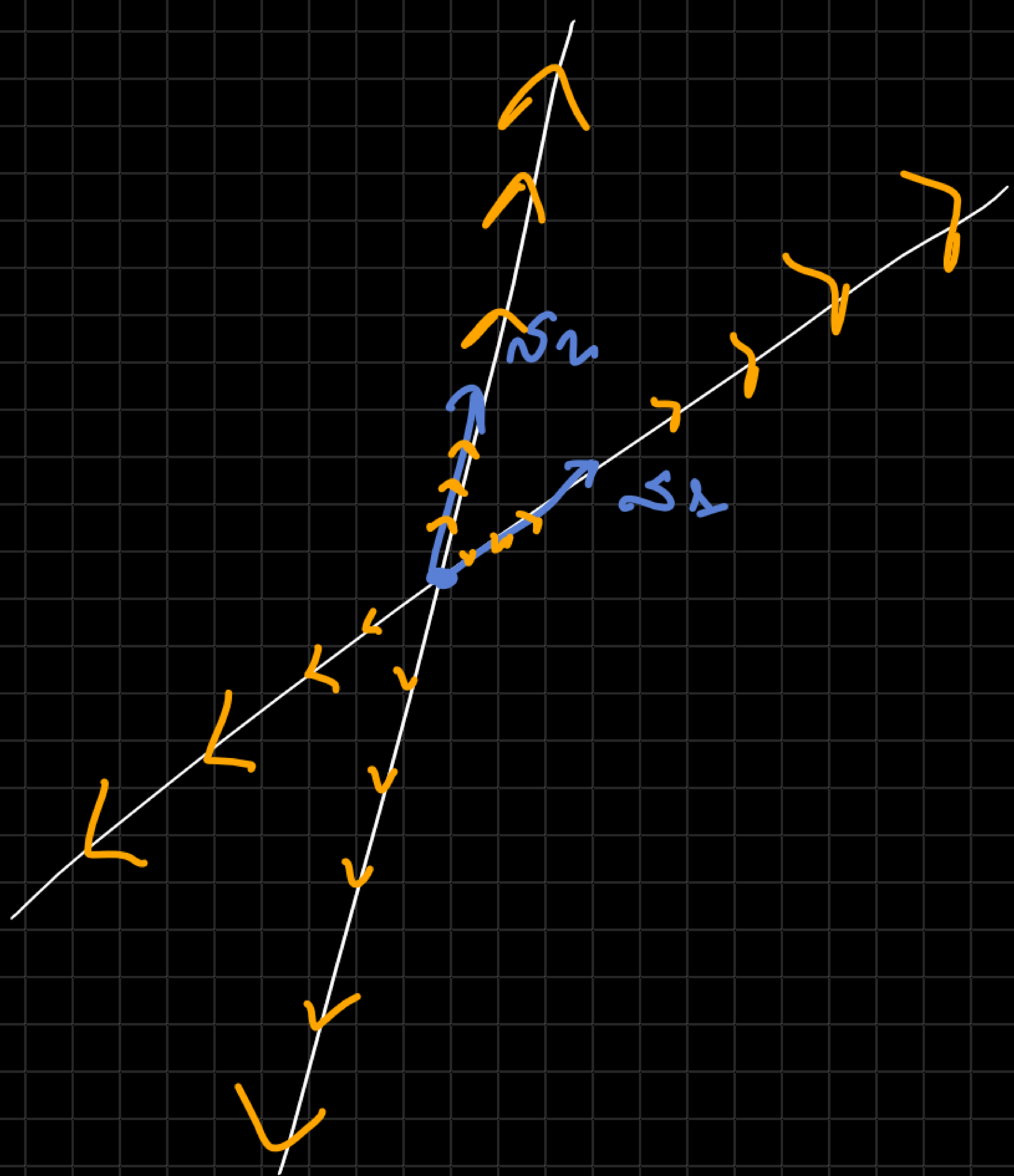


$c_1 < 0$



Então:

($c_1 = 0$ análogo)

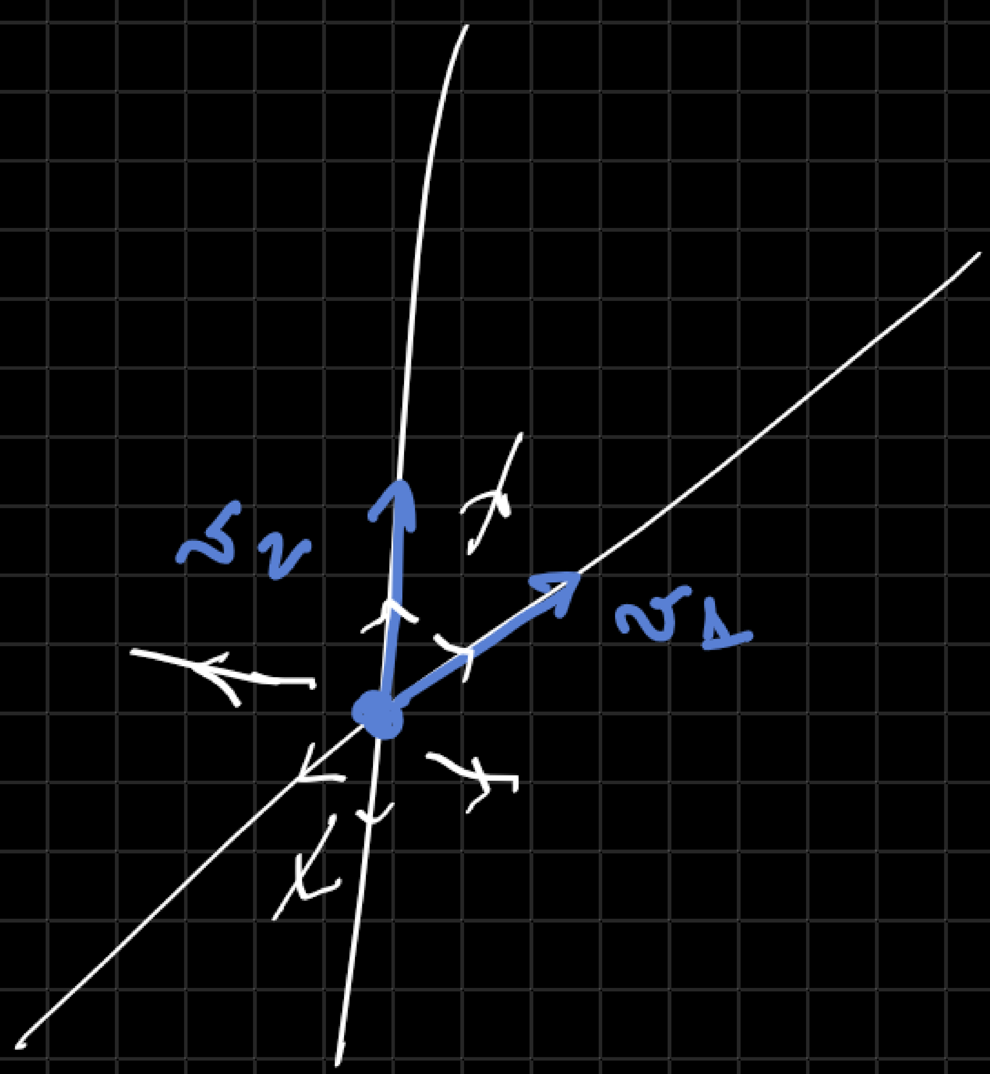


E se c_1 e c_2 são não-nulos?

Em primeiro lugar notamos que, sendo $\lambda_1, \lambda_2 > 0$,

$$\lim_{t\to+\infty} e^{\lambda_1 t} = \lim_{t\to+\infty} e^{\lambda_2 t} = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{t\to-\infty} e^{\lambda_1 t} = \lim_{t\to-\infty} e^{\lambda_2 t} = 0.$$

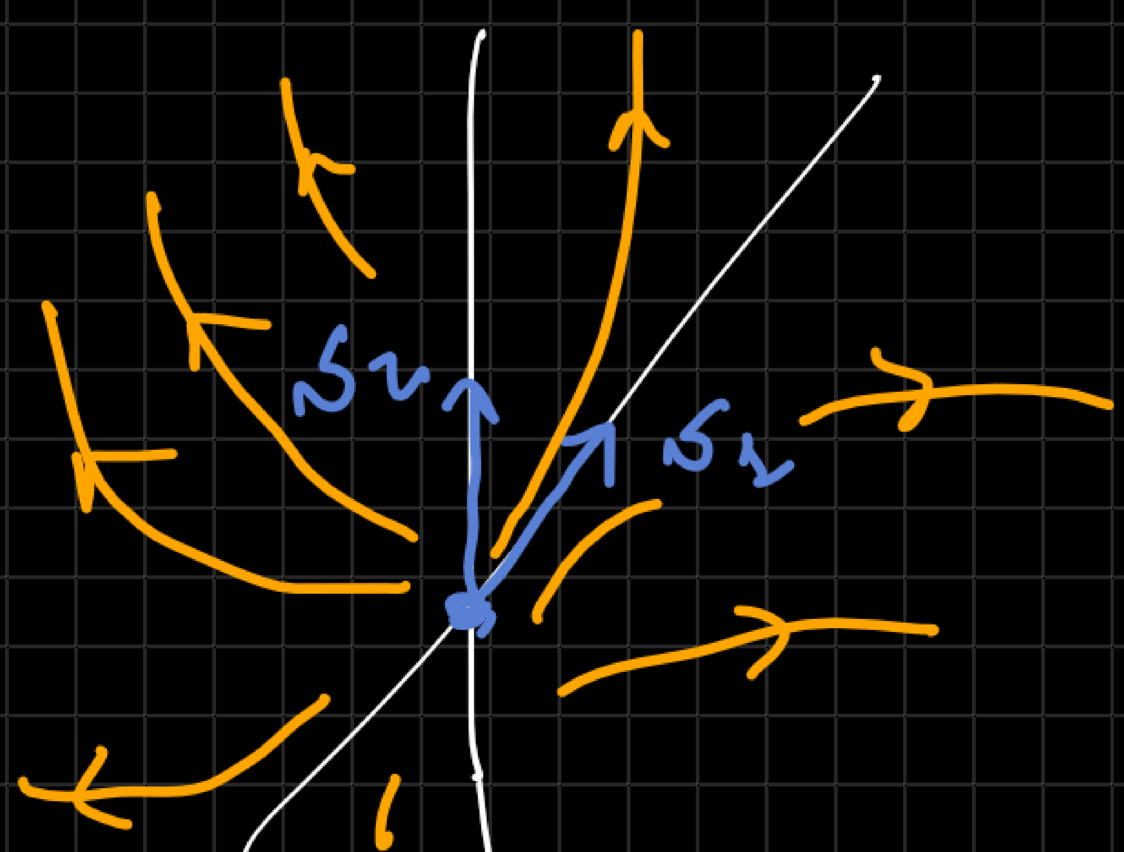
Logo, $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} |x(t)| = +\infty$ e $\displaystyle\lim_{t\to-\infty} x(t) = 0$



<u>Afirmação</u>: Se $c_2 \neq 0$, então a reta tangente à curva $x(t)$ tende à reta E_{λ_2} quando $t \to +\infty$.

De fato, como $\lambda_1 - \lambda_2 < 0$, $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \frac{c_1 e^{\lambda_1 t}}{c_2 e^{\lambda_2 t}} = 0$.

Então: $$\frac{x(t)}{c_2 e^{\lambda_2 t}} = \frac{c_1 e^{\lambda_1 t}}{c_2 e^{\lambda_2 t}} v_1 + v_2 \xrightarrow[t\to+\infty]{} v_2$$

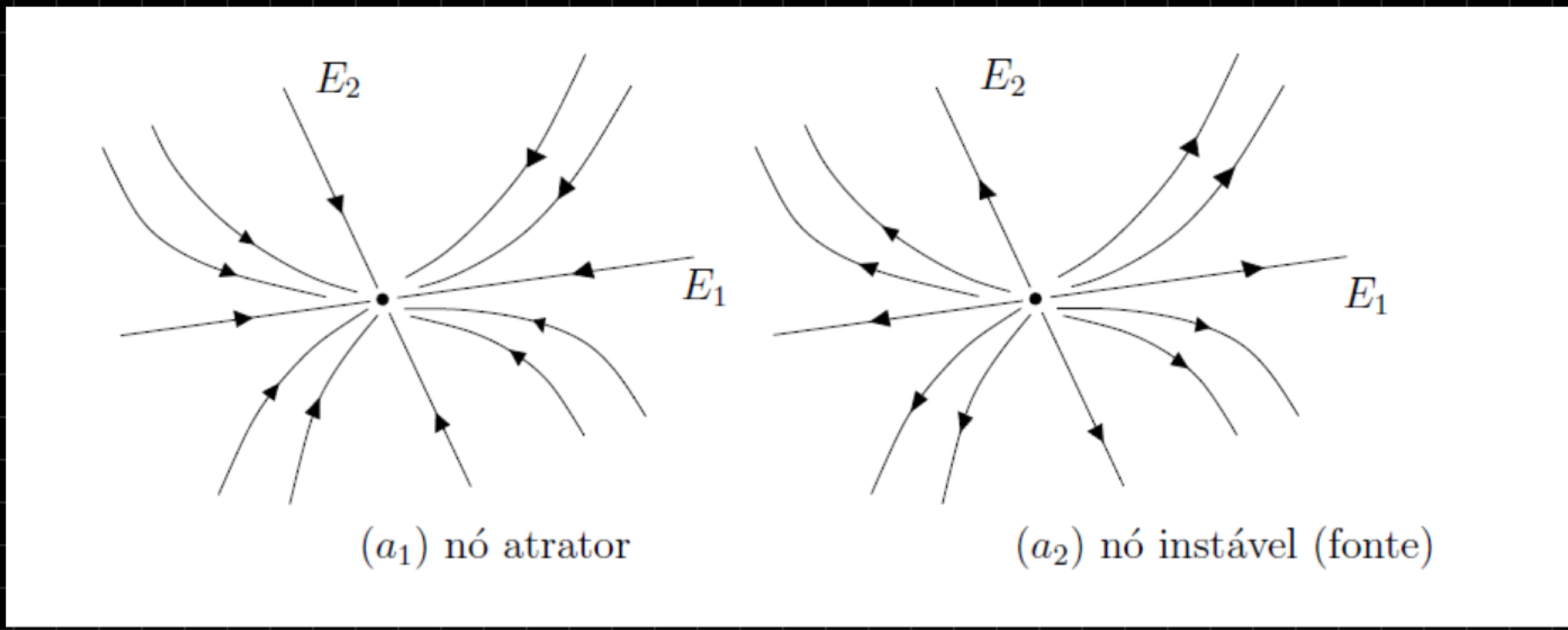


Note que:

$$\frac{x(t)}{c_1 e^{\lambda_1 t}} \xrightarrow[t\to-\infty]{} v_1.$$

Obs: se for $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$, basta mudar o sentido das setas.

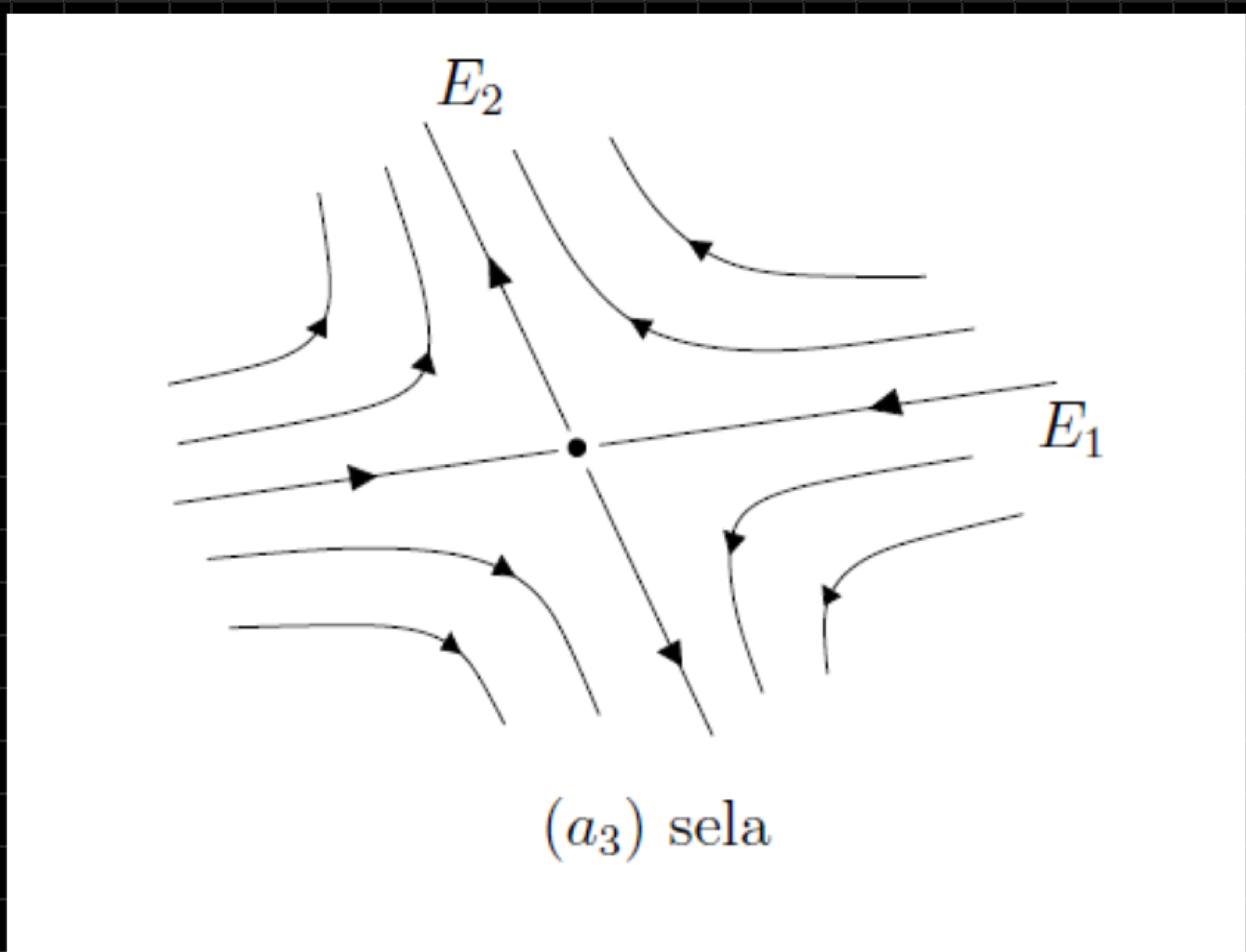
$0 > \lambda_1 > \lambda_2$ $\qquad$ $0 < \lambda_1 < \lambda_2$



(a_1) nó atrator $\qquad$ (a_2) nó instável (fonte)

(ref: Sotomayor)

Se for $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$, então:

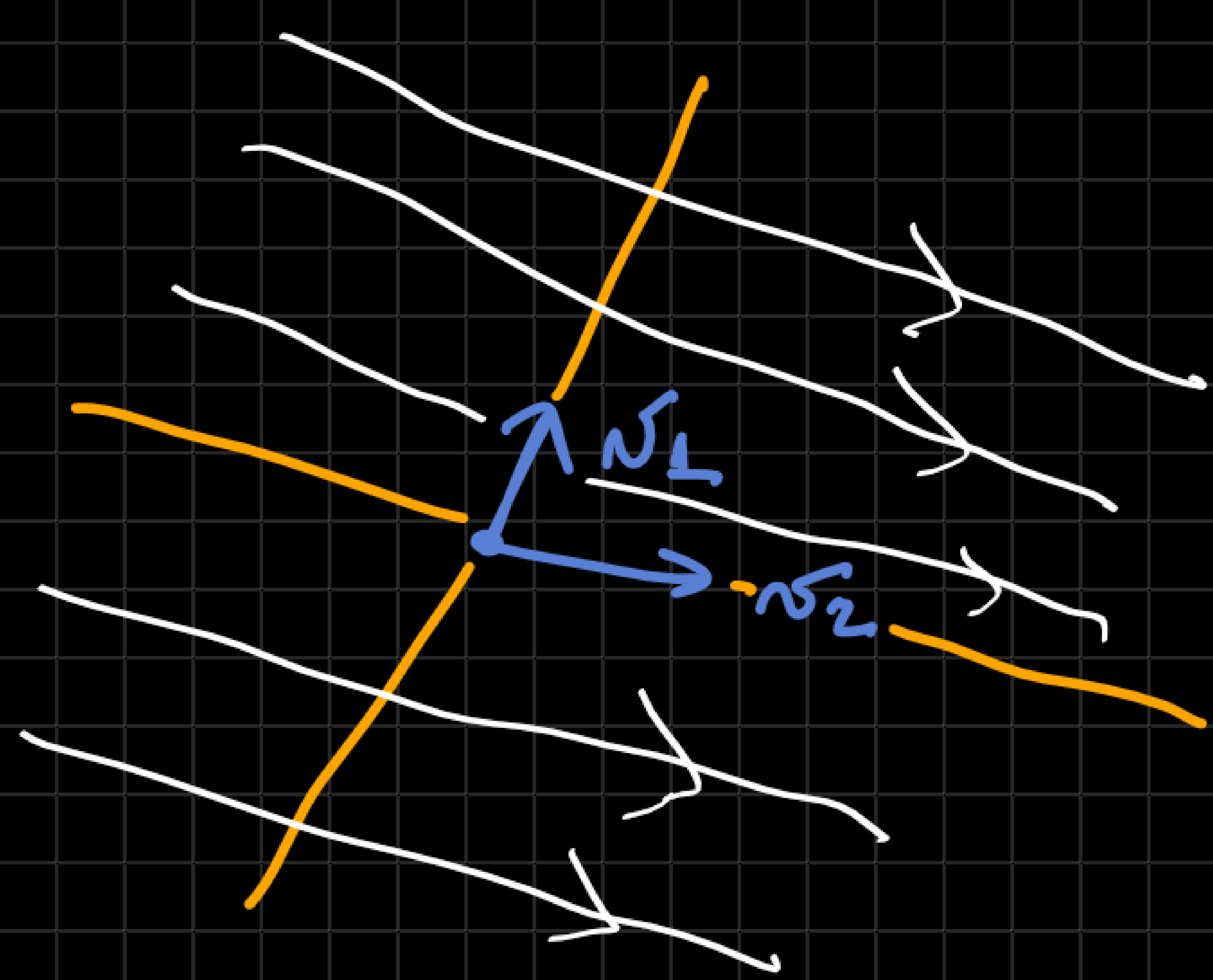


(a_3) sela

(ref. Sotomayor)

Se $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 > 0$.

$$x(t) = c_1 v_1 . e^{0.t} + c_2 e^{\lambda_2 t} . v_2$$
$$= c_1 v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} . v_2$$



(1.b.i) $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$

Como $\dim E_\lambda = \dim \ker (A - \lambda Id) = 2$, existe, como antes, base de autovetores v_1, v_2.

Suponha que $x_0 = c_1 v_1 + c_2 v_2$.

<u>Afirmação</u>: A única solução do PVI (✱) é:

$$x(t) = e^{\lambda t}(c_1 v_1 + c_2 v_2)$$

De fato, $x(0) = x_0$ e $x'(t) = \lambda \cdot e^{\lambda t}(c_1 v_1 + c_2 v_2)$

$$= e^{\lambda t}(c_1 \cdot \lambda v_1 + c_2 \lambda v_2)$$
$$= e^{\lambda t}(c_1 A v_1 + c_2 A v_2)$$
$$= A \cdot x(t).$$

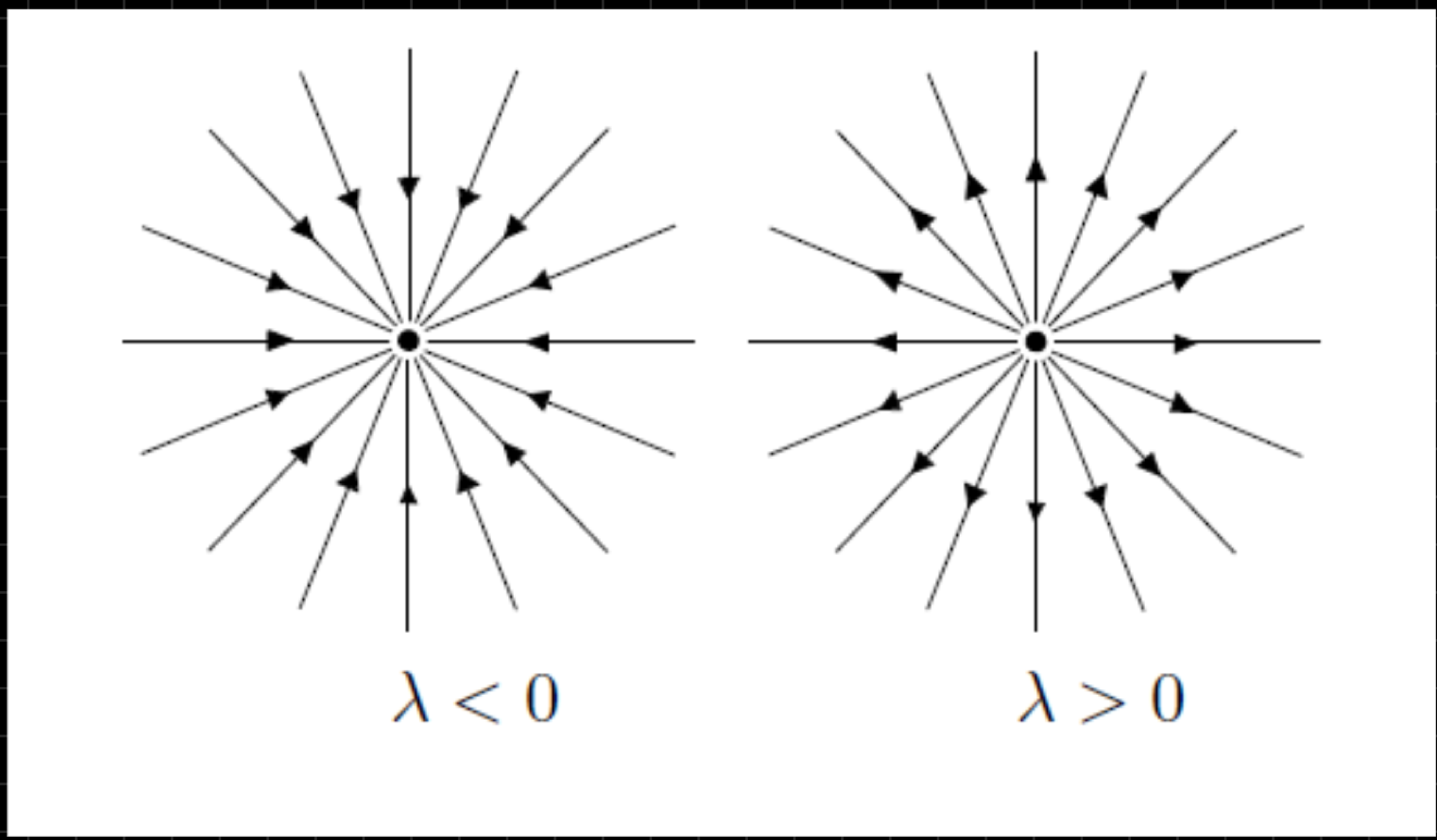
Note que $x(t) \in \{ s \cdot x_0 \mid s \in \mathbb{R} \}$.

Logo, $x(t)$ é um pedaço de reta.

Se $\lambda > 0$, então: $\lim_{t \to +\infty} e^{\lambda t} = +\infty$ e $\lim_{t \to -\infty} e^{\lambda t} = 0$,

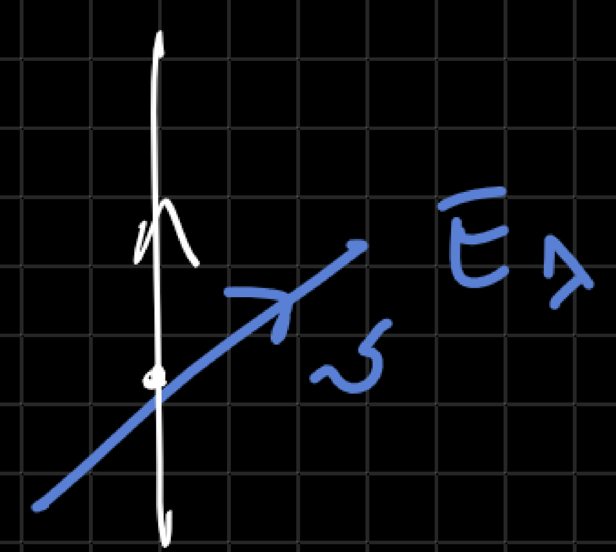
de modo que $\lim_{t \to +\infty} |x(t)| = +\infty$ e $\lim_{t \to -\infty} x(t) = 0$.

Então:



(ref. Sotomayor)

(1.b.iii) $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$



Neste caso, $\dim E_\lambda = 1$.

Sejam $v \in E_\lambda \setminus \{0\}$ e $w^* \in \mathbb{R}^2 \setminus E_\lambda$ tal que $Aw = \lambda w + v$.

Como v e w são LI, $\langle v, w \rangle = \mathbb{R}^2$.

Chamando $v = v_1$, $w = v_2$ e $x_0 = c_1 v_1 + c_2 v_2$,

temos:

<u>Afirmação</u>: A solução do PVI (☆) é dada por $x(t) = e^{\lambda t}[(c_1 + t c_2) v_1 + c_2 v_2]$.

De fato, $x(0) = c_1 v_1 + c_2 v_2$ e:

$$x'(t) = \lambda e^{\lambda t} [(c_1 + c_2 t) v_1 + c_2 v_2] + e^{\lambda t} \cdot c_2 v_1$$

e por outro lado,

$$\begin{aligned} Ax(t) &= A\left(e^{\lambda t} [(c_1 + c_2 t) v_1 + c_2 v_2] \right) \\ &= e^{\lambda t} \cdot (c_1 + c_2 t) A v_1 + e^{\lambda t} c_2 A v_2 \\ &= e^{\lambda t} (c_1 + c_2 t) \cdot \lambda v_1 + e^{\lambda t} \cdot c_2 (\lambda v_2 + v_1) \\ &= \lambda e^{\lambda t} [(c_1 + c_2 t) v_1 + c_2 v_2] + e^{\lambda t} c_2 v_1 \\ &= x'(t). \end{aligned}$$

---

* por que existe um tal w? Em breve...

Note que se existe $w \in \mathbb{R}^2$ tal que $Aw = \lambda w + v$, $\Leftrightarrow (A - \lambda Id) w = v$

então $w \notin E_\lambda$ pois w e v são LI:

$$c_1 w + c_2 v = 0$$

$$\Rightarrow (A - \lambda Id)[c_1 w + c_2 v] = 0$$

$$c_1 (A - \lambda Id) w + c_2 \cdot 0 = 0$$

$\Rightarrow \quad c_1 \underbrace{(A - \lambda Id) w}_{= v} = 0 \quad \Rightarrow \quad c_1 = 0$

$\Rightarrow \quad 0 \cdot w + c_2 \cdot v = 0 \Rightarrow \quad c_2 = 0 \quad$ (pois $v \neq 0$)

$\Rightarrow \quad w$ e v são LI.

Por outro lado, se $Aw = \lambda w + v$ então $w \notin E_\lambda$.

De fato, se $Aw = \lambda w \Rightarrow v = 0$, o que não ocorre.

Logo, fica faltando mostrar que existe $w \in \mathbb{R}^2$ tal que $Aw = \lambda w + v$.

podemos conversar mais depois

Vamos estudar o comportamento das soluções

$$x(t) = e^{\lambda t} \cdot [(c_1 + c_2 t) v_1 + c_2 v_2]$$

a partir das condições iniciais $x_0 = c_1 v_1 + c_2 v_2$, inicialmente para $\lambda > 0$.

Se $c_2 = 0$, então $x(t) = e^{\lambda t} c_1 v_1$ e

daí $x(t)$ fica presa dentro da reta gerada por v_1, com $\lim_{t \to +\infty} |x(t)| = +\infty$ e $\lim_{t \to -\infty} x(t) = 0$.

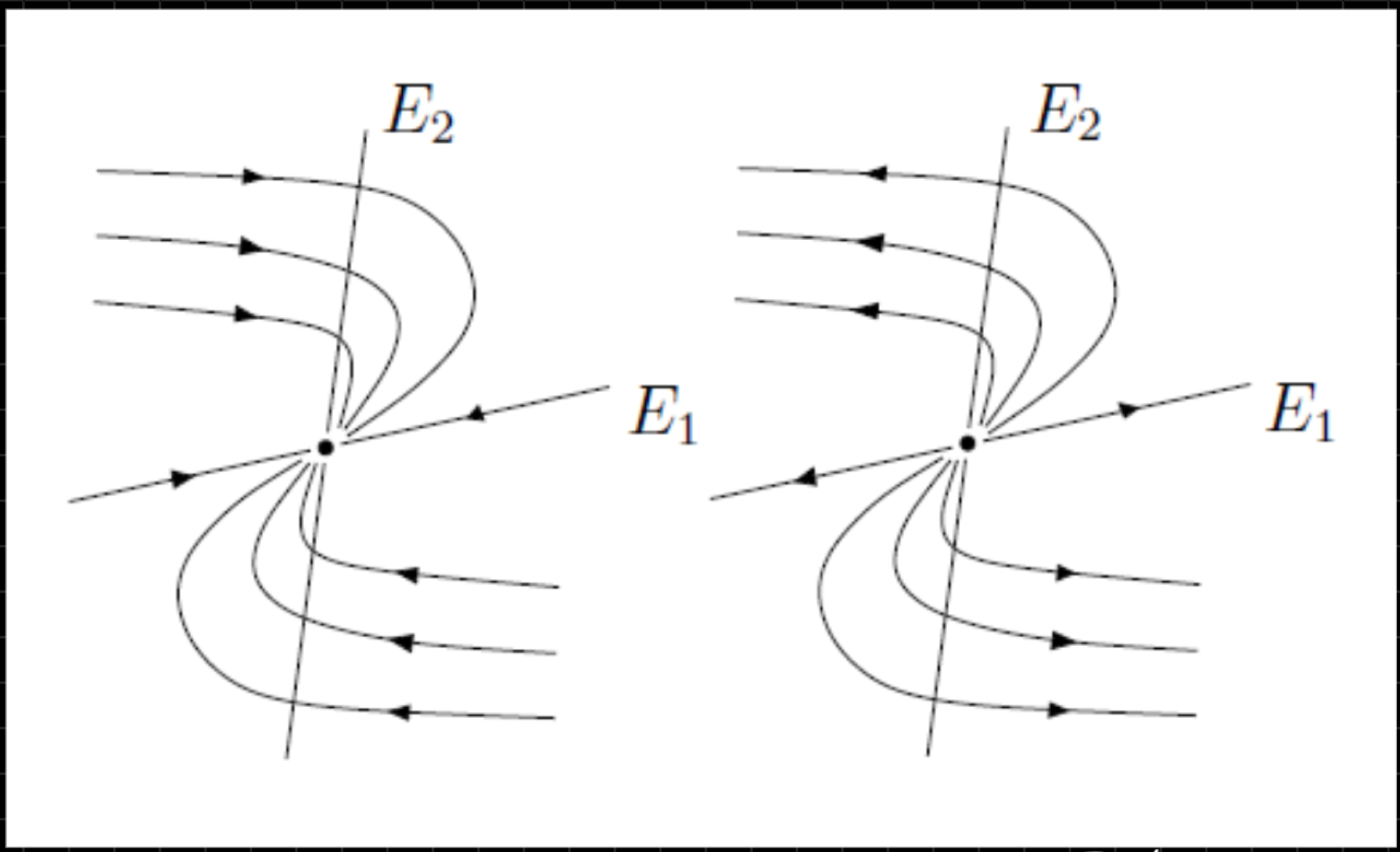
Agora suponha $c_2 \neq 0$. Então:

$$\lim_{t \to \pm\infty} \frac{c_2 e^{\lambda t}}{(c_1 + c_2 t) e^{\lambda t}} = \lim_{t \to \pm\infty} \frac{1}{\frac{c_1}{c_2} + t} = 0$$

Logo, a reta tangente à $x(t)$ converge à reta gerada por v_1.

De forma que temos o seguinte retrato:

$\lambda < 0$ $\lambda > 0$



(ref: Sotomayor)

(1.c) $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$

Afirmação Sejam v_1 autovetor associado à $\lambda_1 = a + bi$ e $v_2 = \overline{v_1}$ autovetor associado à $\lambda_2 = \overline{\lambda_1} = a - bi$.

Então, se $x_0 = c_1 v_1 + c_2 v_2$, a única solução do PVI (✳) é da forma:

$$x(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t), \quad \text{onde}$$

$$x_1(t) = e^{at} \cdot [\cos(bt) v_1 - \operatorname{sen}(bt) v_2]$$

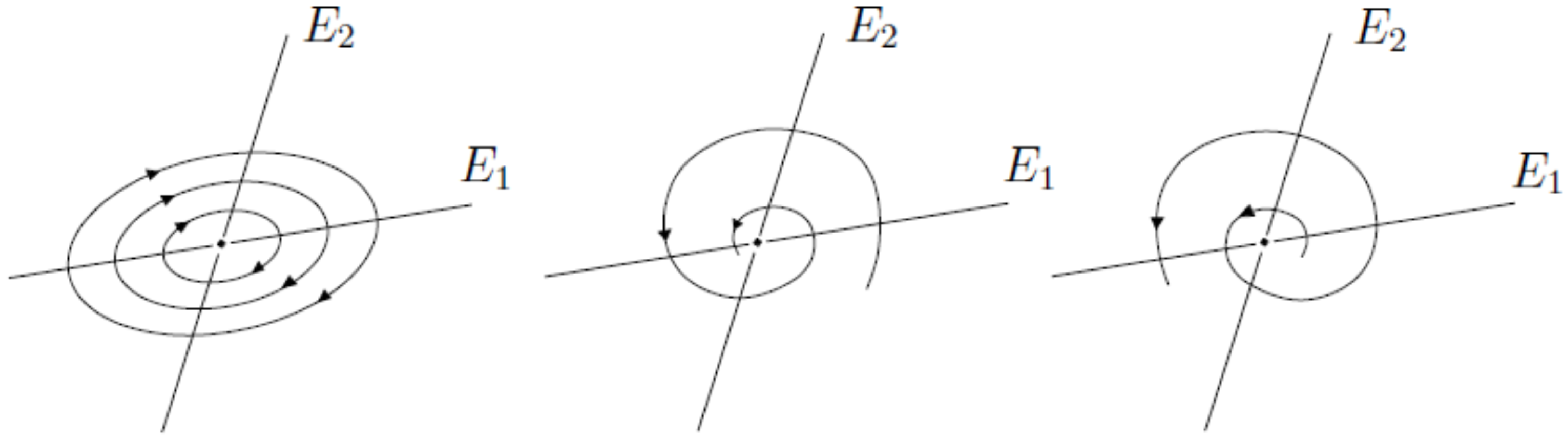
$$x_2(t) = e^{at} [\operatorname{sen}(bt) v_1 + \cos(bt) v_2].$$

Para detalhes, ver o livro ou o Sotomayor (ou podemos conversar na tutoria).

De toda forma,

$$x(t) = e^{at} \begin{pmatrix} \cos bt & -\operatorname{sen} bt \\ \operatorname{sen} bt & \cos bt \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix},$$

na base $\{v_1, v_2\}$.



(b_1) centro (b_2) foco estável (b_3) foco instável

$a = 0$ $a < 0$ $a > 0$ (ref. Sotomayor)

② A é qualquer.

Sabemos que, independentemente de qual a forma de A, sempre existe sua forma de Jordan, ela é única, e A é conjugada à ela.

Daí, existe matriz invertível P tal que:

$$A = P^{-1} \underbrace{J_A}_{\text{forma de Jordan de } A} P$$

Mais ainda, J_A (a forma de Jordan de A) tem de ser de uma das formas anteriores.

Então, como resolver um PVI (✡)

$$(✡) \begin{cases} x' = Ax \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad ?$$

Note que:

$$x' = Ax = P^{-1} J_A P x \iff P x' = J_A P x$$
$$\iff [Px]' = J_A Px$$

Chame $y = Px$. Então, se

$$y(0) = P \cdot x(0) = P x_0 := y_0 ,$$

sabemos resolver o sistema

$$\begin{cases} y' = J_A y \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

Com a solução y em mãos, para obter x basta usar que $x = P^{-1} y$. //