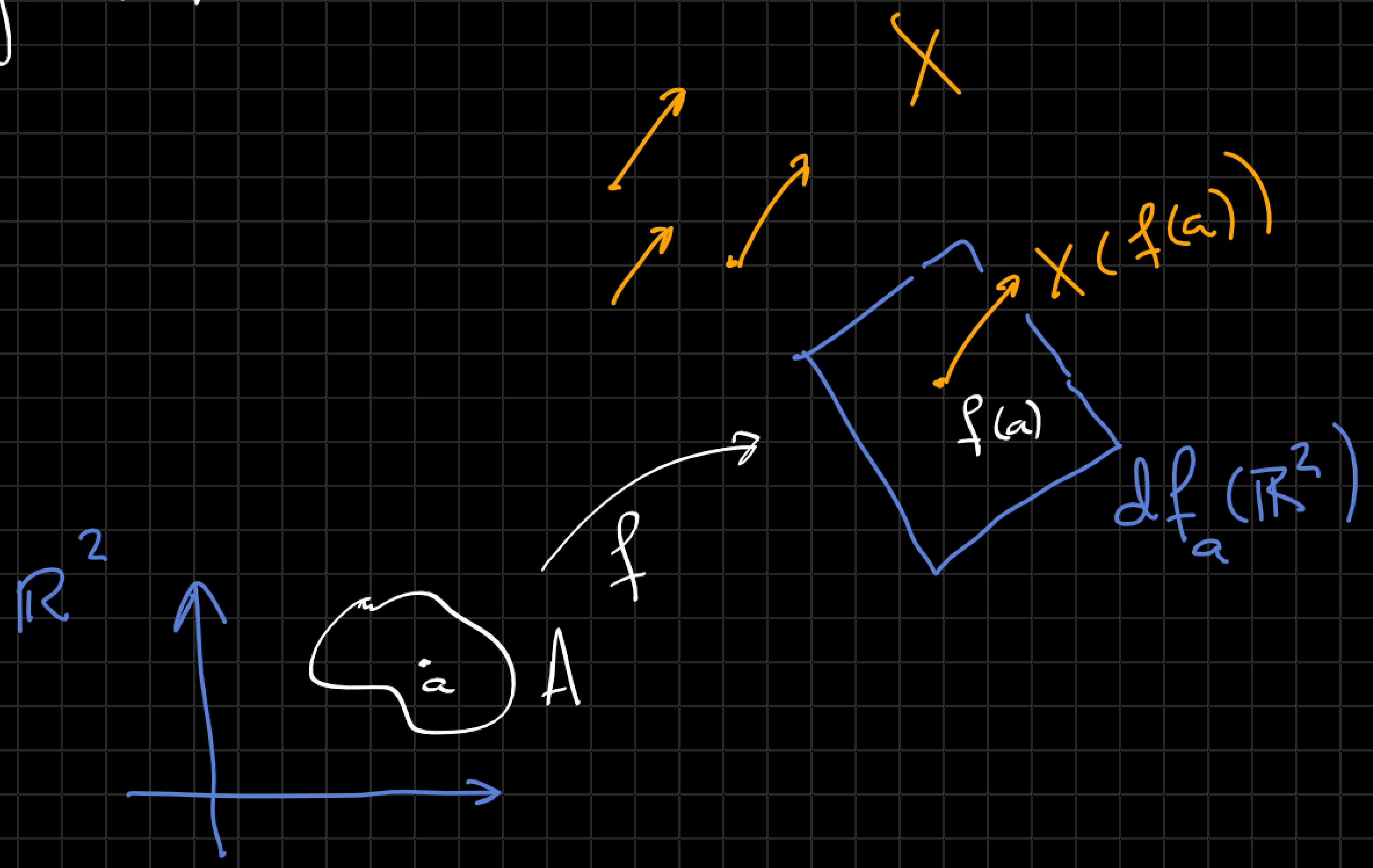
Teorema do fluxo tubular

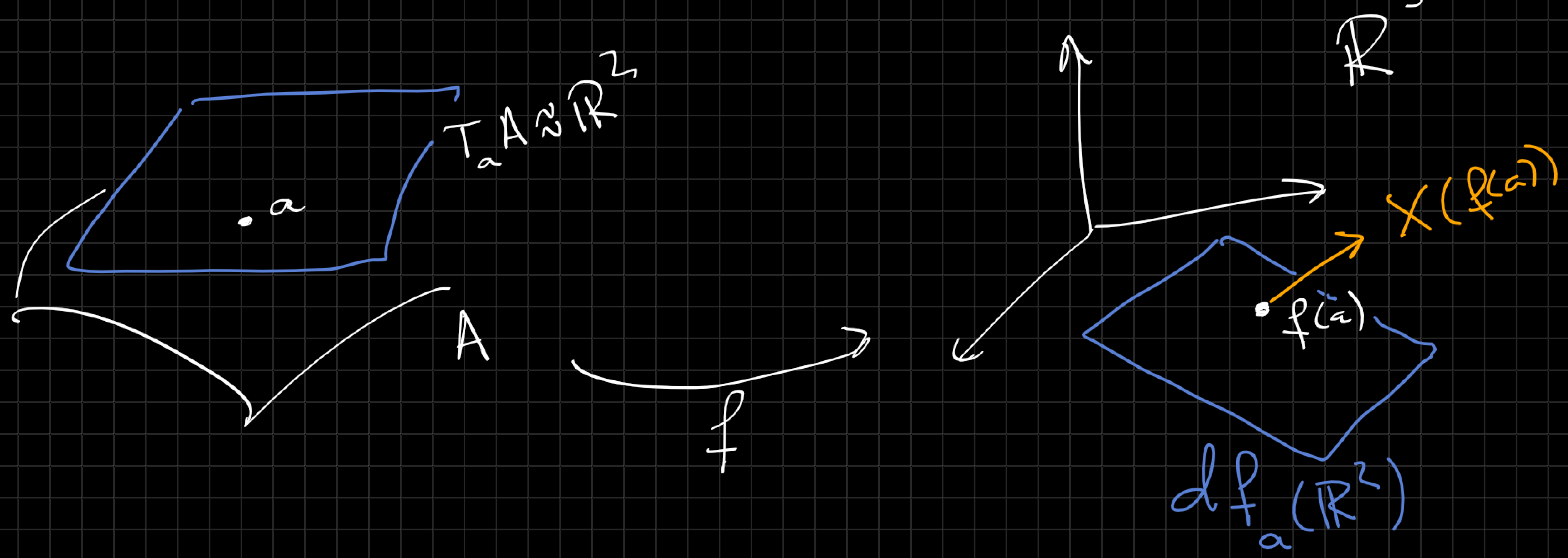
(seguindo Sotomayor)

Def: Sejam $X : \Delta \to \mathbb{R}^n$ um campo de classe C^k, $k \geq 1$, $\Delta \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $A \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ um aberto.
Uma aplicação $f : A \to \Delta$ diferenciável de classe C^r chama-se seção transversal local de X (de classe C^r) quando, para todo $a \in A$,

$$df_a(\mathbb{R}^{n-1}) \quad e \quad X(f(a))$$

geram $\mathbb{R}^n$.





Seja $\Sigma := f(A)$ munido da topologia induzida por $\mathbb{R}^n$. Se $f: A \to \Sigma$ for um homeomorfismo, diz que Σ é uma seção transversal de X.

Exemplo: Seja $p \in \Delta$ um ponto não-singular para o campo X (i.e., $X(p) \neq 0$) e seja

$$\{v_1, \dots, v_{n-1}, X(p)\}$$

uma base de $\mathbb{R}^n$.

Considere $B(0, \delta)$ a bola de centro 0 e raio $\delta > 0$ em $\mathbb{R}^{n-1}$.

Para $\delta > 0$ suficientemente pequeno, $f: B(0,\delta) \subseteq \mathbb{R}^{n-1} \to \Delta$ definida por

$$f(x_1, \dots, x_{n-1}) = p + \sum_{i=1}^{n-1} x_i \cdot v_i$$

é uma seção transversal local de X em p.

De fato, como $p = f(0)$, temos:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0, \dots, h, \dots, 0) - f(0)}{h}$$

$$= \frac{p + h v_i - p}{h} = v_i$$

$$\Rightarrow \quad df_0 = (v_1, v_2, \ldots, v_{n-1})_{n \times (n-1)}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbb{R}^n = \text{span}\{ df_0(\mathbb{R}^{n-1}), \; X(\underbrace{f(0)}_{p}) \}$$

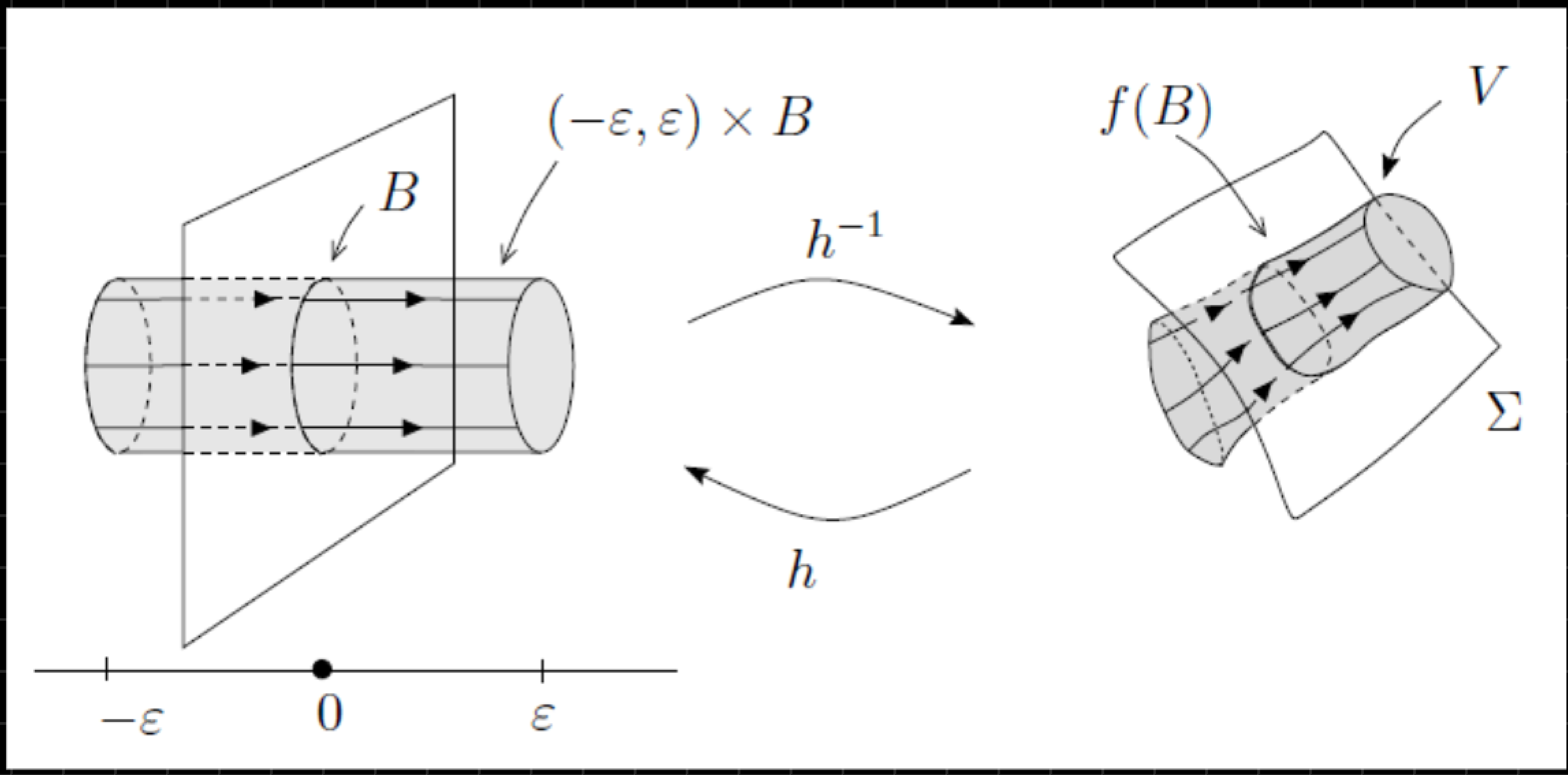
Teorema (fluxo tubular)

Seja p um ponto não-singular de $X: \Delta \to \mathbb{R}^n$, campo de classe C^k $(k \geq 1)$ e $f: A \to \Sigma$ uma seção transversal local de X de classe C^k, com $f(0) = p$. Então existem uma vizinhança V de p em Δ e um difeomorfismo $h: V \to (-\varepsilon, \varepsilon) \times B$ de classe C^k, onde $\varepsilon > 0$ e B é uma bola aberta de $\mathbb{R}^{n-1}$ com centro na origem $0 = f^{-1}(p)$ tal que:

(i) $h(\Sigma \cap V) = \{0\} \times B$;

(ii) h é uma C^k-conjugação entre $X|_V$ e o campo constante $Y: (-\varepsilon, \varepsilon) \times B \to \mathbb{R}^n$,

$$Y \equiv (1, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n.$$



(ref. Sotomayor)

dem: Seja $D = \{(t,x) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x \in \Delta$ e $t \in I_x$,

onde I_x é o intervalo maximal da solução φ_x com $\varphi_x(0) = x\}$ e seja $\varphi : D \to \Delta$ o fluxo de X.

Defina $F : D_A \to \Delta$ por $F(t,u) = \varphi(t, f(u))$,

onde $D_A = \{(t,u) : (t, f(u)) \in D\}$.

Então F manda retas paralelas ao eixo t em curvas integrais do campo X. Vamos mostrar que F é um difeomorfismo local em $0 = (0,0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$.

Pelo Teorema da Função Inversa, basta mostrar que dF_0 é um isomorfismo.

Observe que $$dF_0(e_1) = \frac{d}{dt}\varphi(t, f(0))\Big|_{t=0}$$

$$= X(\varphi(0,p)) = X(p).$$

e que, $\forall j \geq 2$, $dF_0(e_j) = \frac{\partial}{\partial e_j} \varphi(0, f(0)) = \frac{\partial f}{\partial e_{j-1}}(0)$,

pois $\varphi(0, f(u)) = f(u)$, $\forall u \in A$.

Então, como $\left\{ \frac{\partial f}{\partial e_1}(0), \ldots, \frac{\partial f}{\partial e_{n-1}}(0), X(p) \right\}$ gera $\mathbb{R}^n$, segue-se que dF_0 é isomorfismo.

Pelo Teorema da Função Inversa, existem $\varepsilon > 0$ e uma bola B em $\mathbb{R}^{n-1}$ centrada em $0 \in \mathbb{R}^{n-1}$ tais que $F\big|_{(-\varepsilon, \varepsilon) \times B}$ é um difeomorfismo sobre o aberto $V = F((-\varepsilon, \varepsilon) \times B)$.

Chame $h = \left(F\big|_{(-\varepsilon,\varepsilon)\times B} \right)^{-1}$.

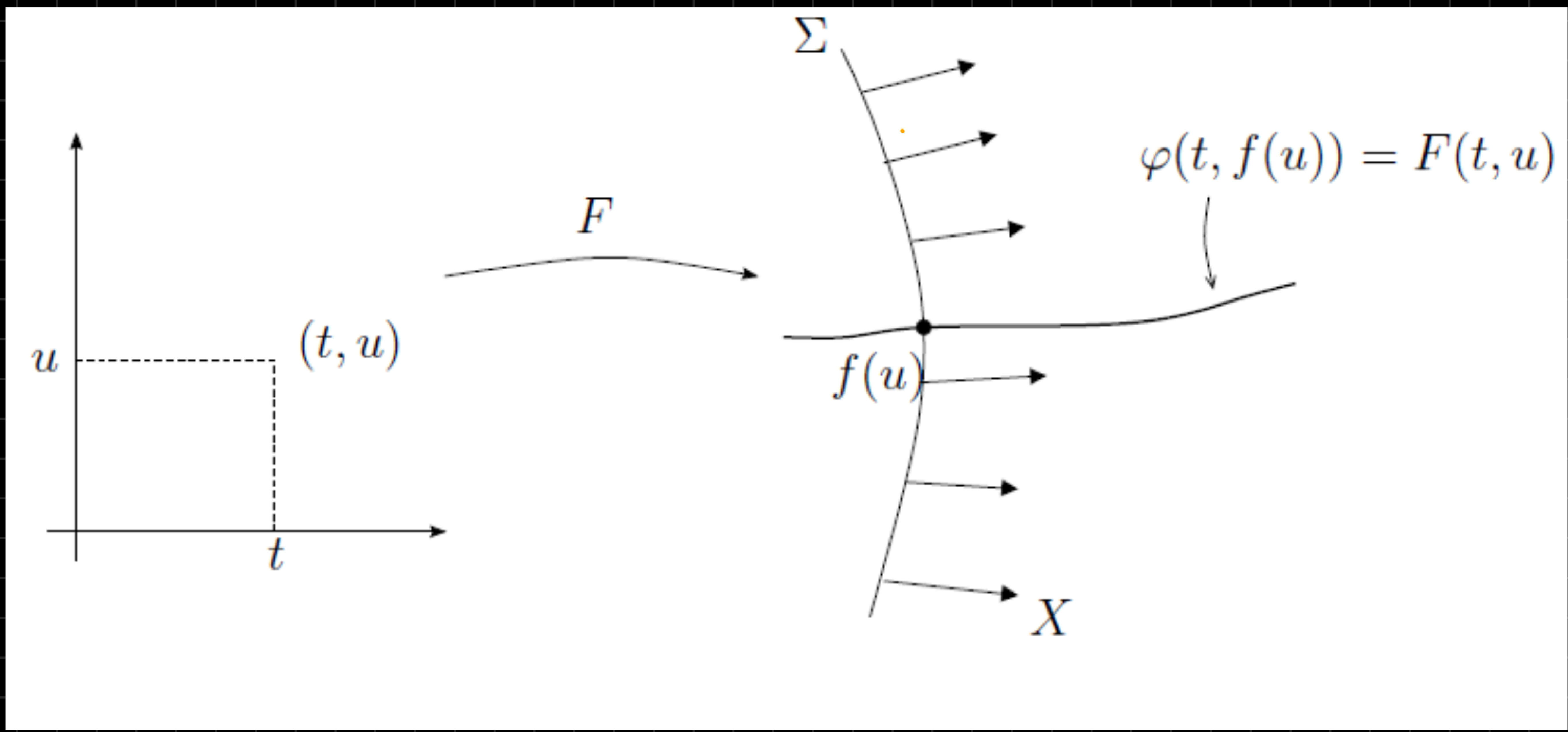
Então, como $F(0, u) = \varphi(0, f(u)) = f(u)$, $\forall u \in B$, temos que $h(\Sigma \cap V) = \{0\} \times B$, o que prova (i).

Para ver (ii), observe que h^{-1} conjuga Y e X pois:

$$dh^{-1}_{(t,u)}(Y(t,u)) = dF_{(t,u)} \cdot (1, 0, \ldots, 0)$$
$$= dF_{(t,u)}(e_1) = \frac{\partial}{\partial t} \varphi(t, f(u)) =$$

$= X(\varphi(t, f(u))) = X(F(t,u)) = X(h^{-1}(t,u)),$

$\forall (t,u) \in (-\varepsilon, \varepsilon) \times B$, provando (ii). ///



(ref. Sotomayor)

Corolário: Seja Σ uma seção transversal de X. Para todo ponto $p \in \Sigma$, existem $\varepsilon = \varepsilon(p) > 0$, uma vizinhança V de p em $\mathbb{R}^n$ e uma função $\tau: V \to \mathbb{R}$ de classe C^k, tais que $\tau(V \cap \Sigma) = 0$ e:

(a) para todo $q \in V$, a curva integral $\varphi(t,q)$ de $X|_V$ é definida e biunívoca em

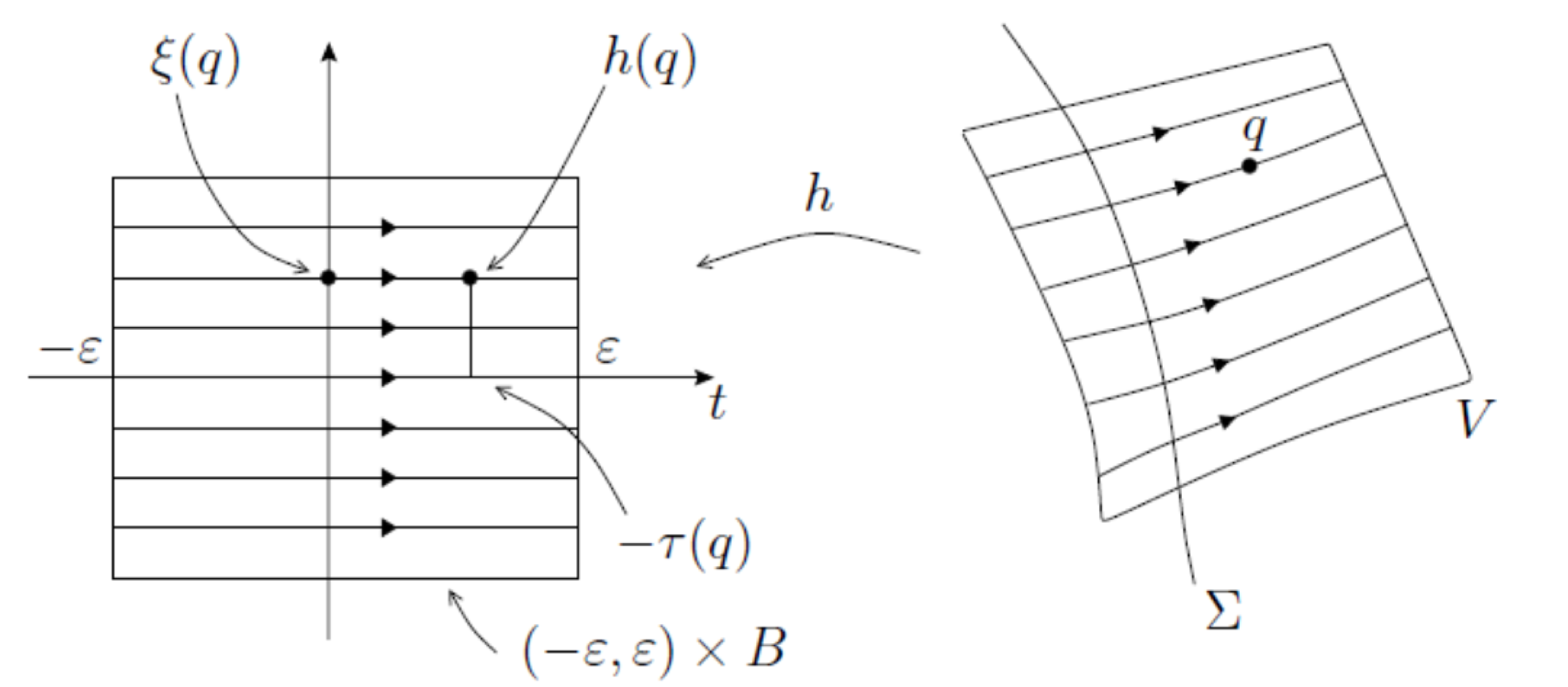
$$J_q = (-\varepsilon + \tau(q), \varepsilon + \tau(q));$$

(b) $\xi(q) = \varphi(\tau(q), q) \in \Sigma$ é o único ponto onde $\varphi(\cdot, q)\big|_{J_q}$ intersecta a seção Σ.

Em particular, $q \in \Sigma \cap V$ se, e só se, $\tau(q) = 0$.

(c) $\xi : V \to \Sigma$ é de classe C^k e $d\xi_q$ é sobrejetiva para todo $q \in V$. Mais ainda, $d\xi_q(v) = 0$ se, e só se, v é colinear com $X(q)$, isto é, $v = \alpha \cdot X(q)$ para algum $\alpha \in \mathbb{R}$.

Demonstração Sejam h, V e ε como no Teorema 3.26. Ponhamos $h = (-\tau, \xi)$. O campo Y daquele teorema satisfaz a todas as afirmações acima. Como h é uma C^k-conjugação, conclui-se que X também satisfaz estas afirmações. ■



(ref. Sotomayor)

Referências:

1) Segui, essencialmente, a seção 3.5 da versão de 2011 do livro do Sotomayor:

Equações Diferenciais Ordinárias
(Textos Universitários do IME-USP)

Algumas referências alternativas:

2) Ordinary Differential Equations and Dynamical System – Gerald Teschl (AMS)

(o autor disponibiliza em seu site!)

3) Teoria Geométrica das Folheações – César Camacho e Alcides Lins Neto (Projeto Euclides-IMPA)

(ou Geometric Theory of Foliations [Springer])

4) Introdução aos Sistemas Dinâmicos – Jacob Palis Jr. e Welington de Melo (Projeto Euclides-IMPA)

(ou Geometric Theory of Dynamical Systems - An Introduction [Springer])