O Teorema de Peano

Odylo Abdalla Costa

21 de julho de 2021

1 Introdução

Estas notas, baseadas em [1], buscam dar uma demonstração do teorema de Peano para a existência de soluções de equações diferenciais ordinárias dadas por campos de vetores contínuos em $\mathbb{R}^n$.

Elas fazem parte dos atendimentos da tutoria do curso de Bacharelado em Matemática da UFF, em particular do atendimento especial da disciplina de Equações Diferenciais Ordinárias ministradas pelo professor Bruno Santiago no período letivo de 2021.1.

Vale notar que esse texto serve apenas de apoio para as aulas e para que o material exposto no livro possa se aproximar do que foi dito durante elas. Não tem, portanto, nenhuma busca por originalidade na demonstração, sendo apenas a minha interpretação do exposto em [1]. Mais ainda, se houverem erros ou sugestões, peço que enviem para odylocosta@id.uff.br, pois serão mais do que bem vindas!

2 Algumas recordações

Sejam $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ um aberto e $f\colon D \to \mathbb{R}^n$ uma função em D. Dado um ponto $(t_0, x_0) \in D$, definimos o **problema de valor inicial** ao qual vamos nos referir ao longo de todo o texto:

$$\begin{cases} x' = f(t,x), \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{1}$$

para o qual buscamos um aberto (a,b) que contém t_0 e uma solução $x\colon (a,b) \to \mathbb{R}^n$ de $x' = f(t,x)$ tal que $x(t_0) = x_0$.

Lembramos que uma **solução da equação** $x' = f(t,x)$ é uma função $x\colon (a,b) \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1 se $(t, x(t)) \in D$ e $x'(t) = f(t, x(t))$ para todo $t \in (a,b)$.

Antes de saber se existem soluções para problemas de valor inicial, precisamos de uma definição:

Definição 1. *Dizemos que uma função $f\colon D \to \mathbb{R}^n$ num conjunto $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ é **localmente Lipschitz em** x se, para cada compacto $K \subset D$ existe $L > 0$ tal que*

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq L\|x - y\|, \tag{2}$$

para quaisquer $(t,x), (t,y) \in K$.

Teorema 1 (Picard-Lindelöf)**.** *Se $f\colon D \to \mathbb{R}^n$ é uma função contínua e localmente Lipschitz em x num conjunto aberto $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, então para cada $(t_0, x_0) \in D$ existe uma e apenas uma solução do problema de valor inicial* (1) *em algum intervalo aberto contendo t_0.*

A prova foi desse teorema foi dada em algumas aulas atrás durante o curso. Não vamos reproduzi-la. Entretanto, lembramos alguns ingredientes que aparecem na prova. O primeiro é uma condição equivalente à definição de solução de um problema de valor inicial.

Proposição 1. *Seja $f\colon D \to \mathbb{R}^n$ uma função contínua definida em um aberto $D \subseteq \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$. Dado $(t_0, x_0) \in D$, uma função contínua $x\colon (a,b) \to \mathbb{R}^n$ num aberto contendo t_0 e tal que $(t, x(t)) \in D$ para todo $t \in (a,b)$, é uma solução do problema de valor inicial* (1) *se, e só se,*

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f\left(s, x\left(s\right)\right)\, ds, \tag{3}$$

para todo $t \in (a,b)$.

Demonstração. Inicialmente fazemos um par de considerações gerais que serão úteis na prova: sendo x e f aplicações contínuas, o mapa

$$t \mapsto f(t, x(t))$$

é ainda uma aplicação contínua (por ser composição de funções contínuas). Como funções contínuas são integráveis quando definidas em intervalos limitados, concluímos que $t \mapsto f(t, x(t))$ é integrável em qualquer intervalo $[t_0, t]$ com $t \in (a,b)$.

Para a demonstração, começamos supondo que $x = x(t)$ é solução do problema de valor inicial (1). Para cada $t \in (a,b)$ temos, pelo Teorema Fundamental do Cálculo,

$$\begin{aligned} x(t) - x_0 &= x(t) - x(t_0) \\ &= \int_{t_0}^{t} x'(s)\, ds \\ &= \int_{t_0}^{t} f\left(s, x\left(s\right)\right)\, ds, \end{aligned}$$

de modo que $x(t)$ satisfaz a equação (3).

Reciprocamente, suponha que a função $x(t)$ satisfaça (3) para todo $t \in (a,b)$. Fazendo $t = t_0$, obtemos $x(t_0) = x_0$ e, derivando, $x'(t) = f(t, x(t))$ para cada $t \in (a,b)$. Mais ainda, como $f(t, x(t))$ é contínua, concluímos que x é de classe C^1, de modo que x é solução de (1). □

Desse modo, podemos buscar soluções do problema de valor inicial dentro do conjunto $C(a,b)$ das funções contínuas limitadas, $x\colon (a,b) \to \mathbb{R}^n$, onde (a,b) é um intervalo contendo t_0. Esse conjunto tem uma estrutura natural de espaço métrico: consideramos em $C(a,b)$ a métrica da continuidade uniforme d, isto é,

$$d(x,y) = \sup_{t \in (a,b)} \|x(t) - y(t)\|.$$

Mais ainda, podemos provar a seguinte proposição.

Proposição 2. *O conjunto $C(a,b)$ munido da métrica da continuidade uniforme d é um espaço métrico completo.*

Em espaços métricos completos, temos uma ferramenta importante que é o Teorema do Ponto Fixo de Banach:

Teorema 2. *Seja $T\colon M \to M$ uma contração num espaço métrico completo (M,d). Então T possui um único ponto fixo $x_0 \in M$. Além disso, dado um ponto arbitrário $x \in M$, a sequência $(T^m(x))_m$ converge para x_0, o único ponto fixo de T.*

Com isso em mãos, a prova do Teorema 1 passa por observar que o mapa T definido, para cada $x \in C(a,b)$, por

$$T[x](t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f\left(s, x\left(s\right)\right)\, ds, \tag{4}$$

está bem definido (isto é, $T[x] \in C(a,b)$) e é uma contração. Isso garante que T admite um ponto fixo e, pela Proposição 1, conseguimos uma, e só uma, solução para o problema de valor inicial (1).

Entretanto, esse último parágrafo tem um problema! Os elementos do conjunto

$$C(a,b) = \{x\colon (a,b) \to \mathbb{R}^n \mid x \text{ é contínua e limitada}\}$$

podem não se comportar bem com relação a f, isto é, não é garantido que, para todo $x \in C(a,b)$, tem-se $(t, x(t)) \in D$, com $t \in (a,b)$.

Por isso fazemos algumas restrições para um subconjunto fechado (e portanto completo) de $C(a,b)$. Considere $\beta > 0$ tal que

$$K := [a,b] \times \overline{B(x_0,\beta)} \subset D, \tag{5}$$

onde $\overline{B(x_0,\beta)} = \{v \in \mathbb{R}^n \mid \|v - x_0\| \leq \beta\}$. Definimos o conjunto $X \subseteq C(a,b)$ por

$$X = \{x \in C(a,b) \mid \|x(t) - x_0\| \leq \beta \text{ para todo } t \in (a,b)\}.$$

Agora sim, temos um espaço métrico completo (X com a métrica induzida por $C(a,b)$), uma contração $T\colon X \to X$ (parte da prova do Teorema 1 era checar que $T(X) \subseteq X$ e que T era de fato uma contração) e portanto possuía um único ponto fixo. Da maneira como foi construída, todo ponto fixo de T era uma solução do problema de valor inicial (1).

3 Enfraquecendo hipóteses

Apesar do Teorema 1 garantir existência e unicidade do problema que estamos tratando, ele possui uma hipótese sobre $f\colon D \to \mathbb{R}^n$ que, em um primeiro contato pode parecer artificial. Será que podemos enfraquecê-la? Colocar uma hipótese mais natural em f?

Como toda função de classe C^1 é localmente Lipschitz em x, pedir regularidade C^1 seria pedir mais do que precisamos. E se pedirmos que f seja apenas uma função contínua, ainda temos um teorema de existência e unicidade? Bom... mais ou menos.

De fato, se demandamos apenas continuidade de f, perdemos a unicidade como veremos mais a frente. Entretanto, mesmo que f seja apenas contínua, o problema de valor inicial (1) ainda admite solução! Esse é o conteúdo do Teorema de Peano:

Teorema 3 (Peano)**.** *Se $f\colon D \to \mathbb{R}^n$ é uma função contínua num aberto $D \subseteq \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n m$ então para cada $(t_0, x_0) \in D$ existe pelo menos uma solução do problema de valor inicial* (1)*, isto é,*

$$\begin{cases} x' = f(t,x), \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

em algum intervalo aberto contendo t_0.

Demonstração. Assim como no Teorema 1, vamos estabelecer constantes $a, b \in \mathbb{R}$ e $\beta > 0$ tais que $a < t_0 < b$, e valem

$$K \coloneqq [a,b] \times \overline{B(x_0, \beta)} \subset D$$

e $(b-a)M \leq \beta$, onde $M = \max\{\|f(t,x)\| \mid (t,x) \in K\}$.

Dado um número real $\alpha > 0$, definimos recursivamente a função contínua $x_\alpha\colon (a,b) \to \mathbb{R}^n$ por:

$$x_\alpha(t) = \begin{cases} x_0 - \int_t^{t_0-\alpha} f(s, x_\alpha(s+\alpha))\, ds, & t \in (a, t_0 - \alpha), \\ x_0, & t \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha], \\ x_0 + \int_{t_0+\alpha}^t f(s, x_\alpha(s-\alpha))\, ds, & t \in (t_0 + \alpha, b). \end{cases} \tag{6}$$

Por exemplo, para $t \in [t_0 + \alpha, t_0 + 2\alpha]$ temos

$$\begin{aligned} x_\alpha(t) &= x_0 + \int_{t_0+\alpha}^t f(s, x_\alpha(s-\alpha))\, ds \\ &= x_0 + \int_{t_0+\alpha}^t f(s, x_0)\, ds, \end{aligned}$$

pois $t_0 + \alpha \leq s \leq t \leq t_0 + 2\alpha$ e daí $t_0 - \alpha \leq t_0 \leq s - \alpha \leq t_0 + \alpha$. Fazemos isso sucessivamente para cada intervalo de comprimento α.

Analogamente, para cada $t \in [t_0 - 2\alpha, t_0 - \alpha]$, temos:

$$\begin{aligned} x_\alpha(t) &= x_0 + \int_{t_0-\alpha}^t f(s, x_\alpha(s+\alpha))\, ds \\ &= x_0 + \int_{t_0-\alpha}^t f(s, x_0)\, ds. \end{aligned}$$

Considere a família $\mathcal{F} = \{x_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{R}^+}$ de todas estas funções x_α. Vamos mostrar que a família $\mathcal{F}$ é uniformemente limitada e equicontínua.

Para a primeira parte, observe que

$$\|x_\alpha(t) - x_0\| \leq \left| \int_{t_0\pm\alpha}^t \|f(s, x_\alpha(s \mp \alpha))\|\, ds \right| \leq (b-a)M \leq \beta,$$

de sorte que $\|x_\alpha(t)\| \leq \|x_0\| + \beta$ para todo $t \in (a,b)$.

Para a equicontinuidade, vamos mostrar que:

$$\|x_\alpha(t) - x_\alpha(s)\| \leq M|t-s|, \tag{7}$$

mas para isso temos de checar alguns casos.

(a) Se $t, s \in (a, t_0 - \alpha)$, então:

$$\begin{aligned}
\|x_\alpha(t) - x_\alpha(s)\| &\leq \left| -\int_t^{t_0-\alpha} \|f(u, x_\alpha(u+\alpha))\| \, du + \int_{t_0-\alpha}^{s} \|f(u, x_\alpha(u+\alpha))\| \, du \right| \\
&\leq \left| \int_{t_0-\alpha}^{t} \|f(u, x_\alpha(u+\alpha))\| \, du + \int_{s}^{t_0-\alpha} \|f(u, x_\alpha(u+\alpha))\| \, du \right| \\
&= \left| \int_s^t \|f(u, x_\alpha(u+\alpha))\| \, du \right| \leq M|t-s|;
\end{aligned}$$

(b) De maneira similar, se $t, s \in (t_0 + \alpha, b)$, teremos:

$$\begin{aligned}
\|x_\alpha(t) - x_\alpha(s)\| &\leq \left| \int_t^{t_0+\alpha} \|f(u, x_\alpha(u-\alpha))\| \, du - \int_{t_0+\alpha}^{s} \|f(u, x_\alpha(u-\alpha))\| \, du \right| \\
&\leq \left| -\int_{t_0+\alpha}^{t} \|f(u, x_\alpha(u-\alpha))\| \, du - \int_{s}^{t_0+\alpha} \|f(u, x_\alpha(u-\alpha))\| \, du \right| \\
&= \left| \int_{t_0+\alpha}^{t} \|f(u, x_\alpha(u-\alpha))\| \, du + \int_{s}^{t_0+\alpha} \|f(u, x_\alpha(u-\alpha))\| \, du \right| \\
&= \left| \int_s^t \|f(u, x_\alpha(u-\alpha))\| \, du \right| \leq M|t-s|;
\end{aligned}$$

(c) Como o caso em que t ou s estão em $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ são sensivelmente mais simples, vamos terminar supondo que $t < t_0 - \alpha < t_0 + \alpha < s$. Nesse caso teremos:

$$\begin{aligned}
\|x_\alpha(t) - x_\alpha(s)\| &\leq \left| -\int_t^{t_0-\alpha} \|f(u, x_\alpha(u+\alpha))\| \, du - \int_{t_0+\alpha}^{s} \|f(u, x_\alpha(u-\alpha))\| \, du \right| \\
&= \left| \int_t^{t_0-\alpha} \|f(u, x_\alpha(u+\alpha))\| \, du + \int_{t_0+\alpha}^{s} \|f(u, x_\alpha(u-\alpha))\| \, du \right| \\
&\leq \int_t^{t_0-\alpha} \|f(u, x_\alpha(u+\alpha))\| \, du + \int_{t_0+\alpha}^{s} \|f(u, x_\alpha(u-\alpha))\| \, du \\
&\leq M(t_0 - \alpha - t) + M(s - t_0 - \alpha) \\
&= M(s-t) + M(t_0 - \alpha - t_0 - \alpha) \\
&= M(s-t) - 2\alpha M \\
&\leq M(s-t) = M|s-t|,
\end{aligned}$$

como afirmamos.

Isso mostra a desigualdade (7) e portanto a equicontinuidade da família $\mathcal{F}$.

Mais ainda, o fato de que a família satisfaz é uniformemente limitada e equicontínua, garante que podemos aplicar o teorema de Arzelà-Ascoli[1]: considere $(\alpha_m)_m$ uma sequência com $\alpha_m \to 0$ quando $n \to +\infty$, então a sequência $(x_{\alpha_m})_m$ admite uma subsequência convergente na métrica da convergência uniforme. Desse modo, passando a uma subsequência podemos supor que $x_{\alpha_m} \colon (a, b) \to \mathbb{R}^n$ converge a uma aplicação $x \colon (a, b) \to \mathbb{R}^n$.

[1]Veja o Apêndice A para mais detalhes.

Vamos mostrar que a função x obtida desse modo é uma solução do problema de valor inicial (1). De fato,

$$\begin{aligned}\|x_{\alpha_m}(s-\alpha_m)-x(s)\| &\leq \|x_{\alpha_m}(s-\alpha_m)-x_{\alpha_m}(s)\|+\|x_{\alpha_m}(s)-x(s)\| \\ &\leq M|\alpha_m|+\|x_{\alpha_m}(s)-x(s)\|,\end{aligned}$$

e daí, as funções $s \mapsto x_{\alpha_m}(s-\alpha_m)$ convergem a x uniformemente. De forma análoga, as funções $s \mapsto x_{\alpha_m}(s+\alpha_m)$ também convergem a x.

Por outro lado, segue da definição das funções x_α dada em (6) que

$$x_{\alpha_m}(t)=x_0+\int_{t_0+\alpha_m}^{t} f(s,x_{\alpha_m}(s-\alpha_m))\ ds$$

para $t \in [t_0,b)$, e portanto, se fazemos $n \to +\infty$, temos:

$$x(t)=x_0+\int_{t_0}^{t} f(s,x(s))\ ds, \tag{8}$$

para $t \in [t_0,b)$.

Analogamente, mais uma vez da definição de x_α, temos:

$$x_{\alpha_m}(t)=x_0-\int_{t}^{t_0-\alpha_m} f(s,x_{\alpha_m}(s+\alpha_m))\ ds$$

para $t \in (a,t_0]$. Mais uma vez, fazendo $n \to +\infty$, obtemos

$$x(t)=x_0-\int_{t_0}^{t} f(s,x(s))\ ds, \tag{9}$$

para $t \in (a,t_0]$.

Juntando (8) e (9), a Proposição 1 garante que $x\colon (a,b) \to \mathbb{R}^n$ é solução do problema de valor inicial (1), como gostaríamos. □

Como dito anteriormente, existem exemplos de funções contínuas $f\colon D \to \mathbb{R}^n$ definidas num aberto $D \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ tais que o problema de valor inicial (1) não possui solução única.

Example 1. Considere a função $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(t,x)=x^{2/3}$. A função f é claramente contínua, mas não é localmente Lipschitz em x. De fato, note que

$$|f(t,x)-f(t,0)|=\left|x^{2/3}-0^{2/3}\right|=\frac{1}{|x^{1/3}|}\left|x-0\right|.$$

Como $\frac{1}{|x^{1/3}|} \to +\infty$ quando fazemos $x \to 0$, a função f não é localmente Lipschitz em x em nenhum aberto $D \subset \mathbb{R}^2$ que intersecte $\mathbb{R}\times\{0\}$.

Consideremos agora o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} x' = x^{2/3} \\ x(0)=0 \end{cases}$$

Observe que $x(t)\equiv 0$ é uma solução do problema.

Por outro lado, se $x = x(t)$ é solução, então $x' = x^{2/3}$. Portanto, em um intervalo no qual a solução não se anula, teremos

$$\frac{x'}{x^{2/3}} = 1.$$

Integrando ambos lados, obtemos: $x(t) = \frac{(t+c)^3}{27}$ para alguma constante $c \in \mathbb{R}$.

Se fixamos $c = 0$, obtemos uma solução $x(t) = t^3/27$, definida para todo $t \in \mathbb{R}$, que é diferente da solução trivial $x \equiv 0$.

A O Teorema de Arzelà-Ascoli

Antes de abordar o teorema, vamos provar um resultado que, antes, apenas enunciamos. Aqui suporemos $-\infty < a < b < +\infty$.

Proposição 3. *Seja $C(a,b)$ o conjunto das funções contínuas limitadas $x\colon (a,b) \to \mathbb{R}^n$ munido da métrica d, definida por*

$$d(x,y) = \sup_{t \in (a,b)} \|x(t) - y(t)\|.$$

Então o espaço métrico $(C(a,b), d)$ é completo.

Demonstração. Uma maneira de checar que um espaço métrico é completo, é provar que toda sequência de Cauchy nele é convergente. Para fazê-lo nesse caso, considere $(x_n)_n$ uma sequência de Cauchy de funções $x_n\colon (a,b) \to \mathbb{R}^n$ em $C(a,b)$, isto é, funções definidas em (a,b), contínuas e limitadas. Devemos checar que $d(x_n, x) \to 0$, quando $n \to +\infty$ para alguma função $x\colon (a,b) \to \mathbb{R}^n$, contínua e limitada, i.e., $x \in C(a,b)$.

Uma maneira usual de encontrar um candidato para x consiste em usar a completude de $\mathbb{R}^n$. Note que, por definição da distância d, temos

$$\|x_n(t) - x_m(t)\| \leq d(x_n, x_m), \tag{10}$$

para todo $t \in (a,b)$. Desse modo, o fato de $(x_n)_n$ ser Cauchy implica a sequência $(x_n(t))_n$ ser Cauchy em $\mathbb{R}^n$ para cada t em (a,b) fixado. Sendo $\mathbb{R}^n$ um espaço métrico completo, existe um ponto $L_t \in \mathbb{R}^n$ tal que $x_n(t) \to L_t$. Definimos nosso candidato a limite $x\colon (a,b) \to \mathbb{R}^n$ por

$$x(t) = \lim_n x_n(t).$$

Para que esse candidato a limite faça sentido, precisamos garantir que $x \in C(a,b)$. Primeiro mostramos que x é uma aplicação contínua. Para tanto, fixe $t_0 \in (a,b)$ e observe que, dado $s \in (a,b)$, vale:

$$\|x(t_0) - x(s)\| \leq \|x(t_0) - x_n(t_0)\| + \|x_n(t_0) - x_n(s)\| + \|x_n(s) - x(s)\|. \tag{11}$$

Pela desigualdade (10) e por estarmos supondo $(x_n)_n$ de Cauchy em $C(a,b)$, temos que, dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|x_m(t) - x_n(t)\| < \varepsilon, \tag{12}$$

para $m, n \geq N$ e todo $t \in (a, b)$. Fazendo, por exemplo, $m \to +\infty$, temos

$$\|x_n(t) - x(t)\| < \varepsilon, \tag{13}$$

para $n \geq N$ e qualquer que seja $t \in (a, b)$. Fazendo $t = t_0$ e fixando, por exemplo, $n = N$, concluímos:

$$\|x(t_0) - x(s)\| \leq \varepsilon + \|x_N(t_0) - x_N(s)\| + \varepsilon = 2\varepsilon + \|x_N(t_0) - x_N(s)\|. \tag{14}$$

Como x_N é função contínua, fixado $t_0 \in (a, b)$ existe $\delta = \delta(N, t_0) > 0$ tal que

$$\|x_N(t_0) - x_N(s)\| < \varepsilon, \tag{15}$$

para $|t_0 - s| < \delta$. Portando, pela desigualdade (14),

$$\|x(t_0) - x(s)\| < 3\varepsilon,$$

para todo $s \in (a, b)$ com $|t_0 - s| < \delta$. Isso mostra que x é contínua em $t_0 \in (a, b)$. Como t_0 foi escolhido de maneira arbitrária, segue que x é contínua em (a, b).

Ainda precisamos checar que x é limitada. Para tanto, devemos garantir que existe uma constante $C_x \in \mathbb{R}$ tal que $\|x(t)\| \leq C_x$ para todo $t \in (a, b)$. Mas de fato, dado $\varepsilon > 0$, a desigualdade (13) garante que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, se $n \geq N$ então $\|x_n(t) - x(t)\| < \varepsilon$ para todo $t \in (a, b)$. Portanto,

$$\begin{aligned} \|x(t)\| &\leq \|x(t) - x_n(t)\| + \|x_n(t)\| \\ &\leq \varepsilon + \|x_n(t)\| \\ &\leq \varepsilon + \sup_{t \in (a,b)} \|x_n(t)\| < +\infty, \end{aligned}$$

para $n \geq N$ e todo $t \in (a, b)$. Desse modo, basta escolher $C_x > \varepsilon + \sup_{t \in (a,b)} \|x_n(t)\|$ para obter a cota desejada. Isso completa a prova de que $x \in C(a, b)$.

Por fim, para completar a demonstração, vamos ver que $d(x_n, x) \to 0$ quando $n \to +\infty$. Mas pelos mesmos argumento dado em (13), dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\|x_n(t) - x(t)\| < \varepsilon$ para todo $n \geq N$ e $t \in (a, b)$. Então,

$$d(x_n, x) = \sup_{t \in (a,b)} \|x_n(t) - x(t)\| \leq \varepsilon,$$

se $n \geq N$. Isso conclui a prova de que $d(x_n, x) \to 0$ quando $n \to +\infty$ e, com isso, a prova de que $(C(a, b), d)$ é completo. □

Teorema (Arzelà-Ascoli)**.** *Dada uma sequência $(\varphi_k)_k$ de funções contínuas $\varphi_k \colon (a, b) \to \mathbb{R}^n$ satisfazendo:*

(*i*) *existe $c > 0$ tal que $\sup_{t \in (a,b)} \|\varphi_k(t)\| < c$ para todo $k \in \mathbb{N}$;*

(*ii*) *dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\|\varphi_k(t) - \varphi_k(s)\| < \varepsilon$ para todo $k \in \mathbb{N}$ e $t, s \in (a, b)$ com $|t - s| < \delta$.*

Então, existe uma subsequência $(\varphi_{k_j})_j$ de $(\varphi_k)_k$ que converge uniformemente para uma função contínua $\varphi \colon (a, b) \to \mathbb{R}^n$.

Demonstração. A ideia da prova é usar um argumento de diagonal. Para isso, considere uma sequência $(t_n)_n$ contida em $[a,b]$ e densa nesse intervalo.[2]

Fixamos t_1 e percorremos a sequência $(\varphi_k)_k$ avaliada nesse ponto, isto é, $(\varphi_k(t_1))_k$. Como essa sequência é limitada, ela admite uma subsequência convergente $(\varphi_{p_k^1}(t_1))_k$.

Em seguida, nos voltamos à subsequência $(\varphi_{p_k^1})_k$ de $(\varphi_k)_k$ e olhamos o que ela faz com t_2, isto é, estudamos a sequência $(\varphi_{p_k^1}(t_2))_k$. Mais uma vez por ser limitada, ela admite subsequência convergente, digamos $(\varphi_{p_k^2}(t_2))_k$.

Seguimos assim, agora olhando para o que a sequência $(\varphi_{p_k^2})_k$ faz com t_3, isto é $(\varphi_{p_k^2}(t_3))_k$, e obtemos novamente uma subsequência convergente.

Procedendo dessa forma, após n passos, obtemos uma nova subsequência convergente $(\varphi_{p_k^n}(t_n))_k$ a partir da sequência limitada $(\varphi_{p_k^{n-1}}(t_n))_k$.

A partir disso, escolhemos funções $\varphi_{p_k^k}$ em $(\varphi_k)_k$ e chamamos $\psi_k\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ por

$$\psi_k(t) = \varphi_{p_k^k}(t).$$

Afirmamos que $(\psi_k)_k$ é a subsequência que buscamos no enunciado, isto é, é uma subsequência de $(\varphi_k)_k$ que converge uniformemente para uma função contínua.

Em verdade, como a hipótese (i) garante que $\varphi_k \in C(a,b)$ para todo k, precisamos apenas mostrar que $(\psi_k)_k$ é uma sequência de Cauchy em $(C(a,b),d)$ pois, com isso, a Proposição 3 garante a existência de $\psi \in C(a,b)$ tal que $d(\psi_k,\psi) \to 0$ quando $k \to +\infty$, o que quer dizer exatamente que $(\varphi_k)_k$ converge uniformemente para uma função contínua.

Para provar que $(\psi_k)_k$ é sequência de Cauchy, começamos observando que, para cada $n \in \mathbb{N}$, a sequência $(\psi_k(t_n))_k$ é convergente. Com efeito, com exceção dos n primeiros, os termos dessa sequência estão todos em uma mesma subsequência convergente, a saber $(\varphi_{p_n^k}(t_n))_k$.

Agora, finalmente, usamos a hipótese (ii), sobre a equicontinuidade da sequência $(\varphi_k)_k$. Com ela, sabemos que para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\|\psi_k(t) - \psi_k(s)\| = \|\varphi_{p_k^k}(t) - \varphi_{p_k^k}(s)\| < \varepsilon, \tag{16}$$

para quaisquer $k \in \mathbb{N}$ e $t,s \in (a,b)$ com $|t-s| < \delta$. Como $(t_n)_n$ é densa em $[a,b]$, dado $t \in (a,b)$ existe $t_n \in (a,b)$ com $|t - t_n| < \delta$. Assim, dados $p,q \in \mathbb{N}$, a desigualdade (16) teremos:

$$\begin{aligned}\|\psi_p(t) - \psi_q(t)\| &\leq \|\psi_p(t) - \psi_p(t_n)\| + \|\psi_p(t_n) - \psi_q(t_n)\| + \|\psi_q(t_n) - \psi_q(t)\| \\ &\leq 2\varepsilon + \|\psi_p(t_n) - \psi_q(t_n)\|.\end{aligned}$$

Agora, como a sequência $(\psi_k(t_n))_k$ é convergente, existe $p_n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|\psi_p(t_n) - \psi_q(t_n)\| < \varepsilon, \tag{17}$$

para quaisquer $p,q \geq p_n$.

Como, neste Apêndice, estamos supondo (a,b) um intervalo limitado, podemos cobri-lo com um numero finito (digamos, N) de subintervalos de tamanho 2δ e que podemos supor, por densidade de $(t_n)_n$ em $[a,b]$, centrados em $t_1,\ldots,t_N$.

Daí, pelas desigualdades (16) e (17), segue:

$$\|\psi_p(t) - \psi_q(t)\| < 3\varepsilon,$$

para quaisquer $t \in (a,b)$ e $p,q \geq \max\{t_1,\ldots,t_N\}$. Isso prova que $(\psi_k)_k$ é sequência de Cauchy em $C(a,b)$ e, pelo o que argumentamos antes, termina a prova do teorema. □

[2]Se quisermos usar justificativas rebuscadas: isso segue da separabilidade de $[a,b]$.

Referências

[1] Luis Barreira and Claudia Valls. *Ordinary Differential Equations: Qualitative Theory.* Vol. 137. American Mathematical Soc., 2012.

[2] Claus Ivo Doering e Artur Oscar Lopes. *Equações Diferenciais Ordinárias* 6ª Ed., IMPA, Rio de Janeiro, 2016.

[3] Morris W. Hirsch, Robert L. Devaney and Stephen Smale. *Differential equations, dynamical systems, and linear algebra*. Vol. 60. Academic press, 1974.

[4] Jorge Sotomayor. *Lições de equações diferenciais ordinárias*. Vol. 11. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 1979.