1) Variedades Diferenciáveis e Campos de Vetores

(seguindo "do Carmo, Geometria Riemanniana")

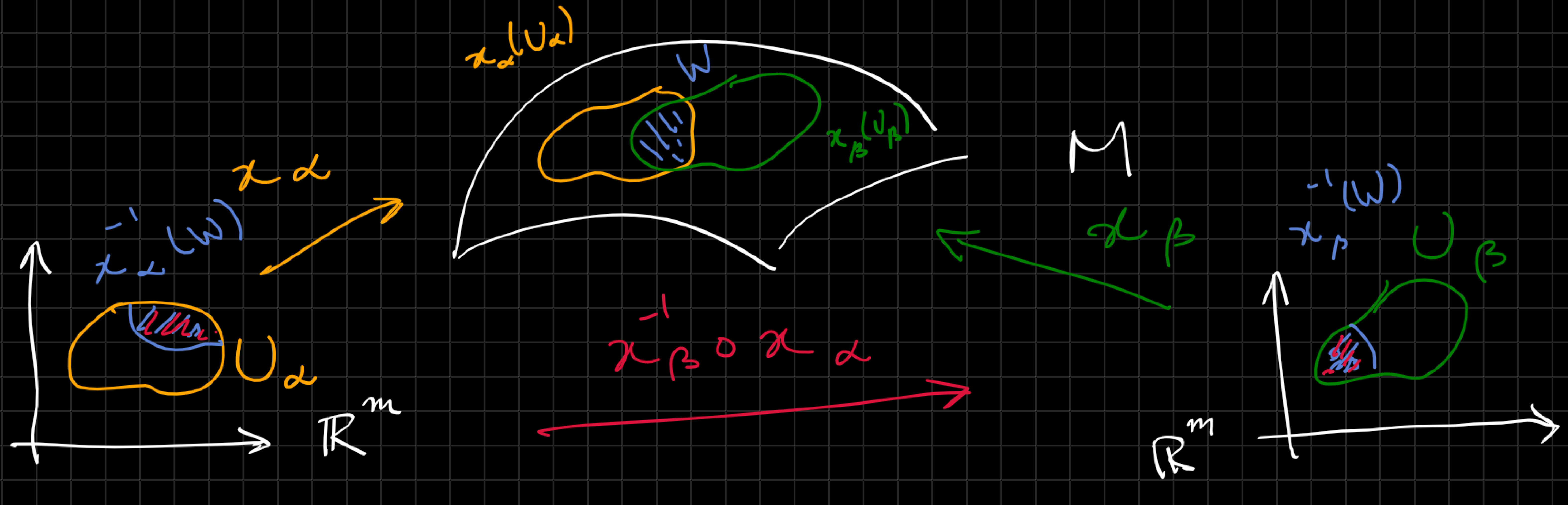
Definição: Uma variedade diferenciável de dimensão n é um conjunto M e uma família de bijeções $x_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \to x_\alpha(U_\alpha) \subset M$ definidas em abertos $U_\alpha \subset \mathbb{R}^n$ tais que:

↳ espaço topológico Hausdorff e segundo enumerável

(1) $\bigcup_\alpha x_\alpha(U_\alpha) = M$;

(2) Para todos α, β com $x_\alpha(U_\alpha) \cap x_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$ os conjuntos $x_\alpha^{-1}(W)$ e $x_\beta^{-1}(W)$ são abertos em $\mathbb{R}^n$ e $x_\beta^{-1} \circ x_\alpha$ e $x_\alpha^{-1} \circ x_\beta$ são diferenciáveis.

(3) A família $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}$ é maximal com respeito às condições (1) e (2).



Definição Dadas duas variedades diferenciáveis M e N (de dimensões $\dim M = m$ e $\dim N = n$), dizemos que uma aplicação

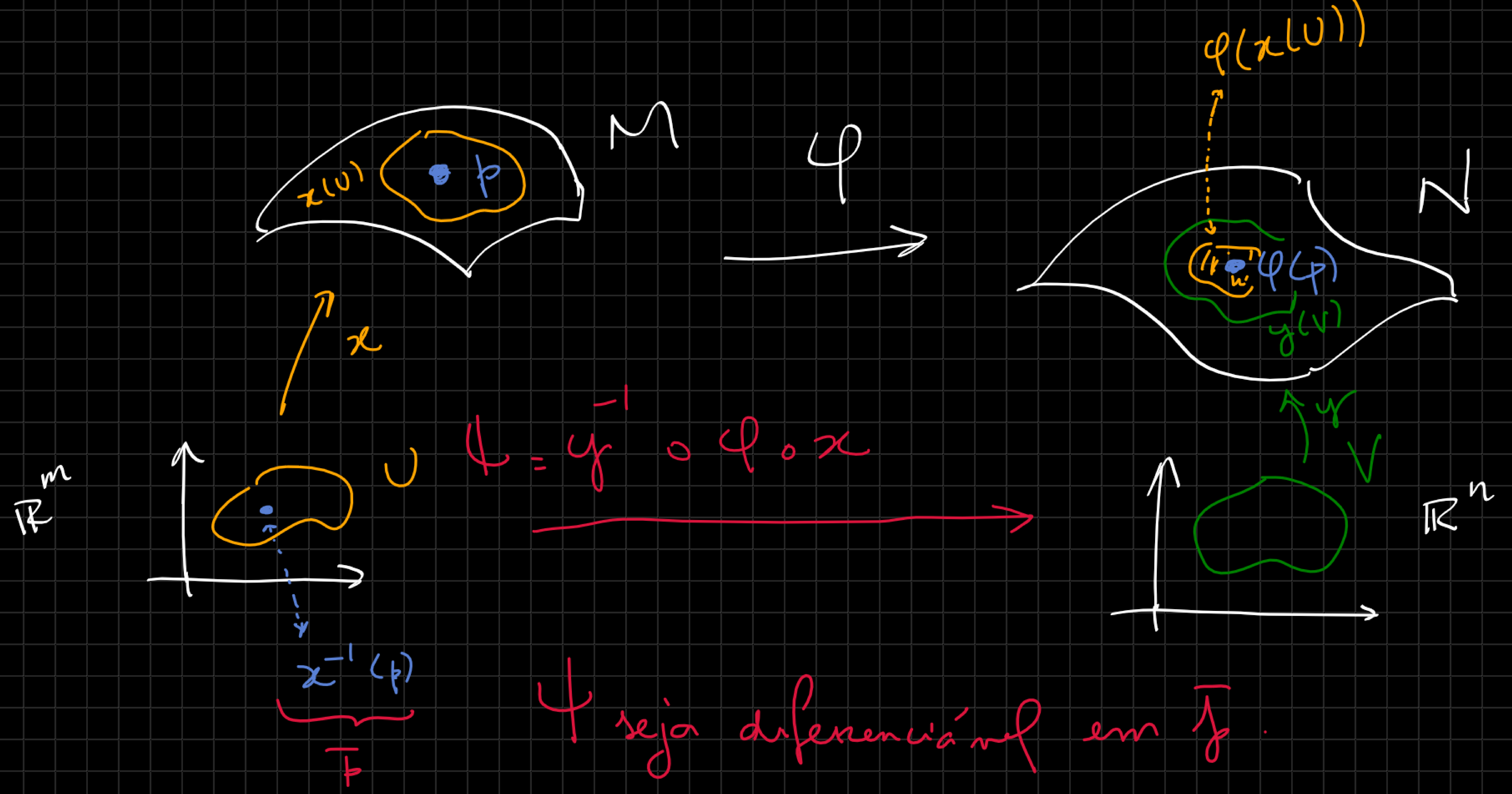
$$\varphi : M \to N$$

é diferenciável em um ponto $p \in M$ se dada uma parametrização $y : V \subset \mathbb{R}^n \to N$ com $\varphi(p) \in y(V)$, existe uma parametrização

$x : U \subset \mathbb{R}^m \to M$, com $p \in x(U)$, tal que $\varphi(x(U)) \subset y(V)$ e a aplicação:

$$y^{-1} \circ \varphi \circ x : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$$

é diferenciável em $x^{-1}(p)$.



Seja $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^n$ uma curva diferenciável de $\mathbb{R}^n$ com $\alpha(0) = p \in \mathbb{R}^n$.

Escreva $\alpha(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$, para $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ e $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Então $\alpha'(0) = (x_1'(0), \dots, x_n'(0)) = v \in \mathbb{R}^n$.

Seja $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável definida em um aberto $U \subset \mathbb{R}^n$, vizinhança de p.

Restringindo f à curva α, a derivada direcional de f no ponto p, segundo o vetor v como:

$$\frac{\partial f}{\partial v}(p) = \left.\frac{d(f \circ \alpha)}{dt}\right|_{t=0} = df_{\alpha(0)} \cdot \alpha'(0)$$

$$\langle \nabla f(p), v \rangle = \sum_{i=1}^{n} \left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{t=0} \cdot \left.\frac{dx_i}{dt}\right|_{t=0} = \sum_{i=1}^{n} \left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{t=0} \cdot x_i'(0)$$

$$\text{"="} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i'(0) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} \right) f .$$

Com essa notação, a derivada direcional segundo v é um operador sobre funções diferenciáveis que depende unicamente de v.

Definição: Seja M uma variedade diferenciável e uma aplicação diferenciável $\alpha:(-\varepsilon,\varepsilon)\to M$ (isto é, uma curva em M). Suponha que $\alpha(0)=p$ e defina:

$$\mathcal{D}=\{f:M\to\mathbb{R}\mid f \text{ é diferenciável em } p\}.$$

O vetor tangente à curva α em $t=0$ é, por definição, a função $\alpha'(0):\mathcal{D}\to\mathbb{R}$ dada por:

$$f\in\mathcal{D}\longmapsto \alpha'(0)f:=\left.\frac{d(f\circ\alpha)}{dt}\right|_{t=0}\in\mathbb{R}.$$

Um vetor tangente em p é o vetor tangente em $t=0$ de alguma curva $\alpha:(-\varepsilon,\varepsilon)\to M$ com $\alpha(0)=p$.

O conjunto de todos os vetores tangentes em é denotado por T_pM.

Fixada uma parametrização $x:U\subset\mathbb{R}^n\to M$ com $x(0)=p$, podemos exprimir f e a curva α nessa parametrização: dado $\bar{q}\in x(U)$, existe $q\in U$ tal que $\bar{q}=x(q)$. Como $q\in U\subset\mathbb{R}^n$ podemos escrever: $q=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$.

Daí, $f(\bar{q}) = f(x(q))$

$\bar{f} := f \circ x \quad = \bar{f}(x_1, \dots, x_n)$

Ainda, se $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$, suponha que

$\alpha(t) \in x(U)$, $\forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

Então faz sentido escrever $\bar{\alpha} := x^{-1} \circ \alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to U$

e a representamos por $\bar{\alpha}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$,

pois $\bar{\alpha}(t) \in U \subseteq \mathbb{R}^n$.

Com essas notações teremos:

$$\alpha'(0) f = \frac{d}{dt}(f \circ \alpha)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}(f \circ x \circ x^{-1} \circ \alpha)\Big|_{t=0}$$

$\alpha'(0) : \mathcal{D}_p \to \mathbb{R}$
$f \mapsto \alpha'(0) f$

$$= \frac{d}{dt}(\bar{f} \circ \bar{\alpha})\Big|_{t=0}$$

Agora, $\bar{f} : U \to \mathbb{R}$ e $\bar{\alpha} : (-\varepsilon, \varepsilon) \to U$. Podemos usar o que fizemos para $\mathbb{R}^n$ (e todo o resto que sabemos de Análise Real)!

$$\alpha'(0) f = \frac{d}{dt}(\bar{f} \circ \bar{\alpha})\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} \bar{f}(x_1(t), \dots, x_n(t))\Big|_{t=0} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i'(0) \cdot \frac{\partial \bar{f}}{\partial x_i}\bigg|_{t=0} = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i'(0) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_{p} \right) \bar{f}$$

$\hookrightarrow p$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} x_i'(0) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_{x(0)} \right) f$$

Em outras palavras, o vetor $\alpha'(0)$ pode ser expresso, na parametrização $x : U \subset \mathbb{R}^n \to M$, por

$$\boxed{\alpha'(0) = \left(\sum x_i'(0) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_{x(0)} \right)}.$$

Observe que $\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_{x(0)}$ é o vetor tangente em p à curva coordenada $x_i \mapsto x(0, \ldots, 0, x_i, 0, \ldots, 0)$.

<u>Proposição:</u> Para cada $p \in M$, o conjunto T_pM é um espaço vetorial de dimensão n. ($\dim M = n$)

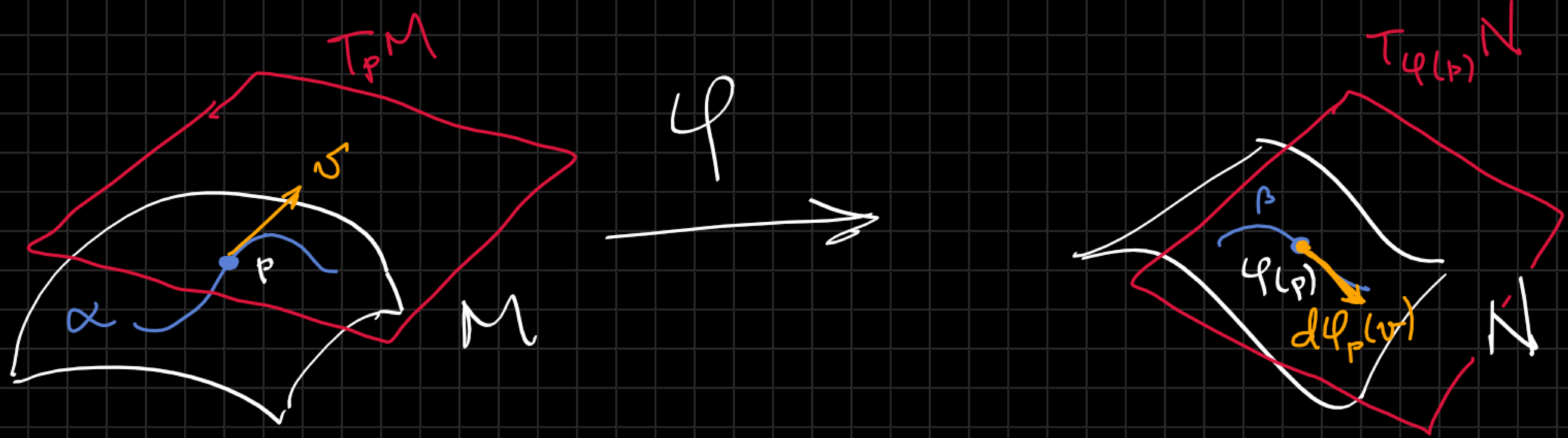
Fixada uma parametrização ao redor de p, digamos $x : U \to M$, fica determinada uma base

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}\bigg|_{x(0)}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\bigg|_{x(0)} \right\}.$$

<u>Proposição:</u> Sejam M e N variedades de dimen-

sões $\dim M = m$ e $\dim N = n$. Seja $\varphi : M \to N$ uma aplicação diferenciável. Para cada $p \in M$ e cada $v \in T_pM$, escolha $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ curva diferenciável com $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = v$. Faça $\beta = \varphi \circ \alpha$.

A aplicação $d\varphi_p : T_pM \to T_{\varphi(p)}N$ dada por $d\varphi_p(v) = \beta'(0)$ é uma aplicação linear que não depende da escolha de α.



Definição: A aplicação linear $d\varphi_p$ dada pela proposição acima é chamada a diferencial de φ em p.

Teorema: Sejam $\varphi : M \to N$ uma aplicação diferenciável entre variedades M e N e $p \in M$. Se $d\varphi_p : T_pM \to T_{\varphi(p)}N$ é um isomorfismo, então φ é um difeomorfismo local ao redor de $p \in M$. Reciprocamente, se φ é difeomorfismo local ao redor de p, $d\varphi_p$ é isomorfismo.

dem: Como esta é uma afirmação local, podemos pensar apenas em vizinhanças de $\mathbb{R}^m$ e $\mathbb{R}^n$ e usar o teorema da função inversa em $\mathbb{R}^n$.

Note que, como $d\varphi_p$ é isomorfismo,

$$\dim T_pM = \dim T_{\varphi(p)}N \Rightarrow \dim M = \dim N.$$

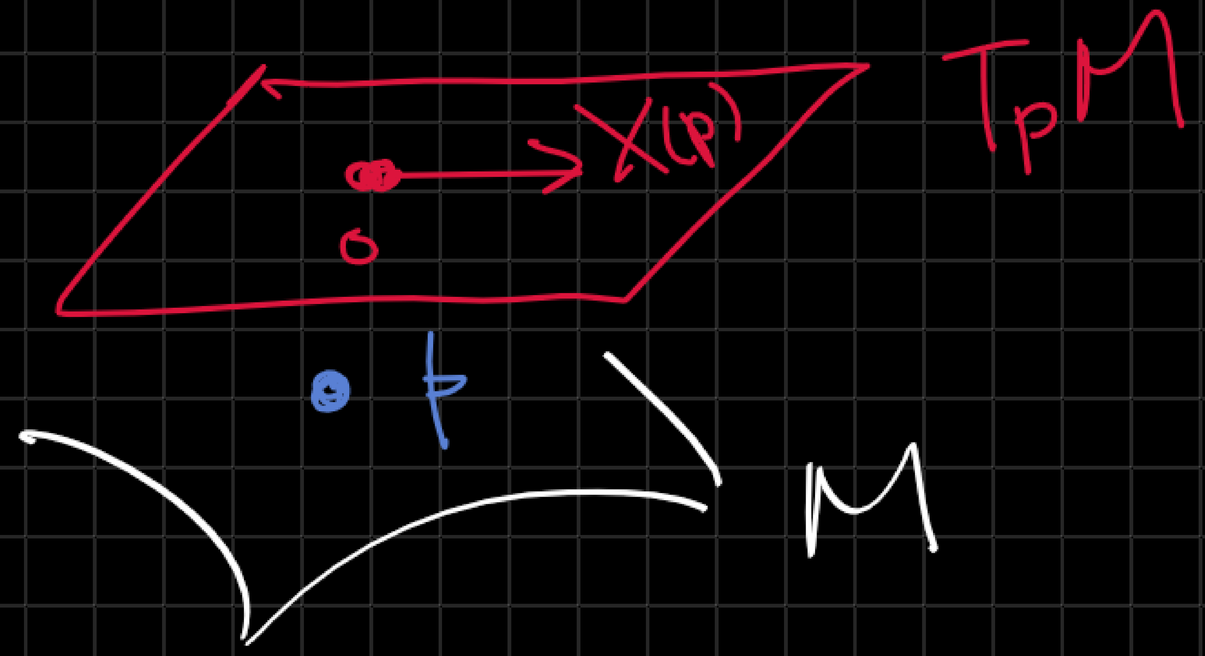
(se supomos M e N conexas, por exemplo). ///

Exemplo: Seja M uma variedade, $p \in M$ e $x : U \subseteq \mathbb{R}^m \to x(U) \subset M$ uma parametrização ao redor de p (i.e., $p \in x(U)$).

Como x é homeomorfismo, $x(U)$ é aberto de M, logo (exercício) $x(U)$ é variedade.

Mostra-se que x é difeomorfismo entre U e $x(U)$ e que a base $\left\{\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p\right\}_{i=1}^m$ de T_pM é dada por $\boxed{\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p = dx_p(e_i)}$.

Definição: Um campo de vetores X em uma variedade diferenciável M é uma correspondência que a cada ponto $p \in M$ associa um vetor $X(p) \in T_pM$.



Seja TM o fibrado tangente de M, isto é,

$$TM = \{(p, v) \mid p \in M \text{ e } v \in T_pM\}.$$

↳ TM é uma variedade diferenciável de dimensão $2m$, onde $m = \dim M$.

Então, X é uma aplicação de M em TM.

O campo X é diferenciável se $X: M \to TM$ for uma aplicação diferenciável entre variedades.

Dada uma parametrização $x: U \subset \mathbb{R}^m \to M$, podemos escrever:

$$X(p) = \sum_{i=1}^{n} a_i(p) \cdot \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p,$$

onde cada $a_i: U \to \mathbb{R}$ é uma função em U e $\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_m}\right\}$ é a base associada à x.

Nessas condições, X é diferenciável se, e somente se, cada a_i for diferenciável.

Como interpretar X como uma aplicação:

$$X: \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{F}$$

$\mathcal{D} = \{f: M \to \mathbb{R} \mid f \text{ é diferenciável}\}$

$\mathcal{F} = \{f: M \to \mathbb{R} \mid f \text{ é função}\}$

$$f \in \mathcal{D} \longmapsto Xf : M \to \mathbb{R},$$

onde Xf é definida assim:

$$p \in M \longmapsto Xf(p) = \sum_{i=1}^{n} a_i(p) \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i}(p),$$

onde $\frac{\partial f}{\partial x_i}(p)$ é um abuso para escrever $\frac{\partial}{\partial x_i}(f \circ x)(x^{-1}(p))$.

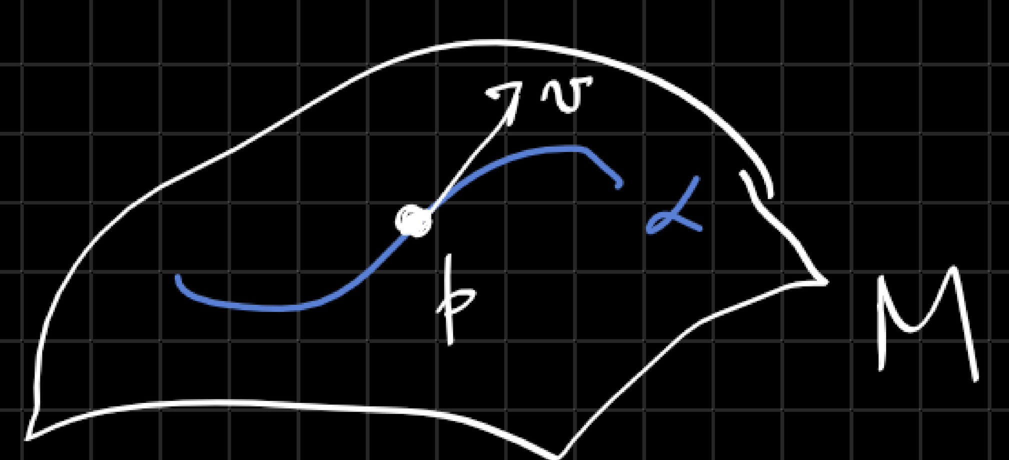
Mostra-se que Xf não depende da parametrização x e que X é diferenciável se, e só se, $X : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$, isto é, $X(\mathcal{D}) \subseteq \mathcal{D} \subseteq \mathcal{F}$ (ou ainda, $Xf \in \mathcal{D}$, $\forall f \in \mathcal{D}$).

Lema: Sejam $\varphi : M \to M$ um difeomorfismo, $v \in T_pM$ e $f : M \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável definida em uma vizinhança de $\varphi(p)$. Então:

$$\boxed{(d\varphi(v)f)\varphi(p) = v(f \circ \varphi)(p)}.$$

dem: Seja $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ uma curva diferenciável tal que:

$$\begin{cases} \alpha(0) = p \\ \alpha'(0) = v \end{cases}$$



Como $\alpha'(0) = v \in T_pM$, temos para toda $\psi : M \to \mathbb{R}$ diferenciável em $p \in M$:

$$v(\psi)(p) = \frac{d}{dt}(\psi \circ \alpha)(t)\Big|_{t=0}$$

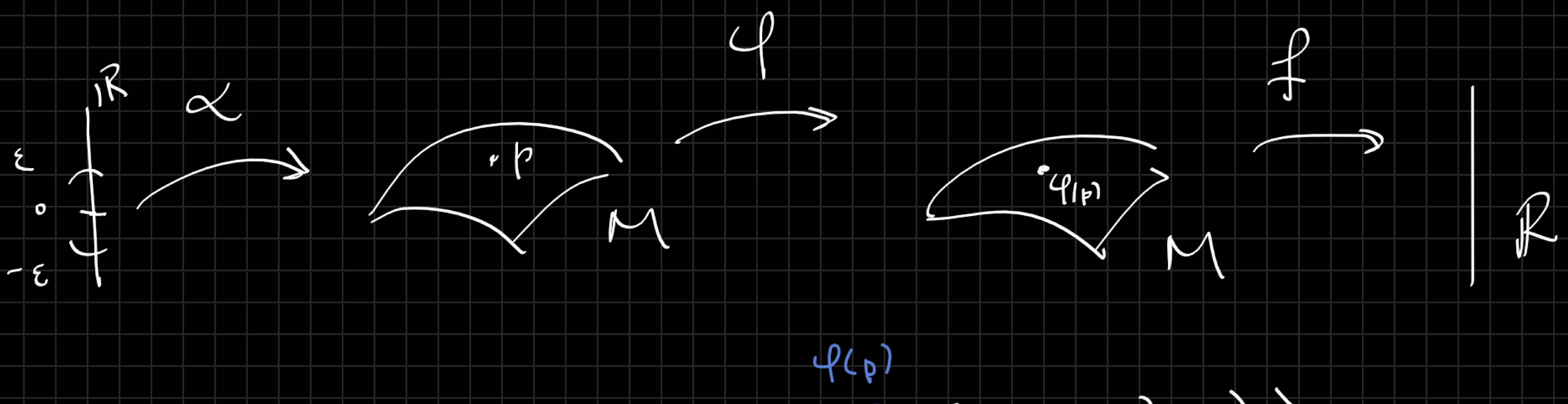
Logo, se $f : M \to \mathbb{R}$ é diferenciável ao redor de $\varphi(p)$ e $\varphi : M \to M$ é um difeomorfismo, então:

$$f \circ \varphi : M \to \mathbb{R}$$

é diferenciável ao redor de p e daí:

$$v(f \circ \varphi)(p) = \frac{d}{dt}(f \circ \varphi \circ \alpha)(t)\Big|_{t=0}$$

Nos resta mostrar que $\frac{d}{dt}(f \circ \varphi \circ \alpha)\Big|_{t=0} = (d\varphi(v)f)_{(\varphi(p))}$



$$\frac{d}{dt}(f \circ \varphi \circ \alpha) \text{ ``=''} \left\langle \nabla f(\overbrace{\varphi(\alpha(0))}^{\varphi(p)}), d\varphi_{\underbrace{\alpha(0)}_{p}}(\underbrace{\alpha'(0)}_{v}) \right\rangle$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\varphi(p)) \cdot \beta_i'(0), \text{ onde } \beta = \varphi \circ \alpha.$$

Por outro lado, como escrevemos $d\varphi_p(v)$ em coordenadas?

$$d\varphi_p(v) = \frac{d}{dt}(\varphi\circ\alpha)\Big|_{t=0} = \beta'(0) = (\beta_1'(0),\dots,\beta_m'(0)) \in T_{\varphi(p)}M$$

$$\Rightarrow \quad \beta'(0) = \sum_{i=1}^{m} \beta_i'(0)\cdot\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_{\varphi(p)}$$

$$\Rightarrow \left(d\varphi_p(v)\, f\right)(\varphi(p)) = $$
$$= \sum_{i=1}^{m} \beta_i'(0)\cdot\frac{\partial f}{\partial x_i}\Big|_{\varphi(p)},$$

ou seja, $\left(d\varphi_p(v)f\right)(\varphi(p)) = \frac{d}{dt}(f\circ\varphi\circ\alpha)(t)\Big|_{t=0}.$ //

A interpretação de $X:\mathcal{D}\to\mathcal{D}$ como um operador e portanto, iterá-lo: se X e Y são campos diferenciáveis em M e $f: M\to\mathbb{R}$ uma função diferenciável, podemos considerar funções:

$$\underbrace{X(\underbrace{Yf}_{\text{função}})}_{\text{função}} \quad \text{e} \quad \underbrace{Y(\underbrace{Xf}_{\text{função}})}_{\text{função}}$$

Em geral, XY e YX não são campos vetoriais!

Por exemplo: se $X = \sum_i a_i \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}$ e $Y = \sum_j b_j \cdot \frac{\partial}{\partial x_j}$

então: $X(Yf) = X\left(\sum_j b_j \cdot \frac{\partial f}{\partial x_j}\right)$

$$= \sum_{i,j} a_i \cdot \frac{\partial b_j}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_j} + \sum_{i,j} a_i b_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

o operador $\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$ não faz sentido no nosso mundo...

Mas, pelo Teorema de Schwarz, $XY - YX$ faz!

Logo, se chamamos $\mathfrak{X}^r(M) = \{$ campos de classe C^r em $M \}$, então:

$$[\cdot,\cdot] : \mathfrak{X}^r \times \mathfrak{X}^r \longrightarrow \mathfrak{X}^r$$
$$(X, Y) \longmapsto [X, Y] = XY - YX$$

está bem definida!

2) EDO's em variedades:

Teorema: Seja X um campo diferenciável de vetores em uma variedade diferenciável M e seja $p \in M$.

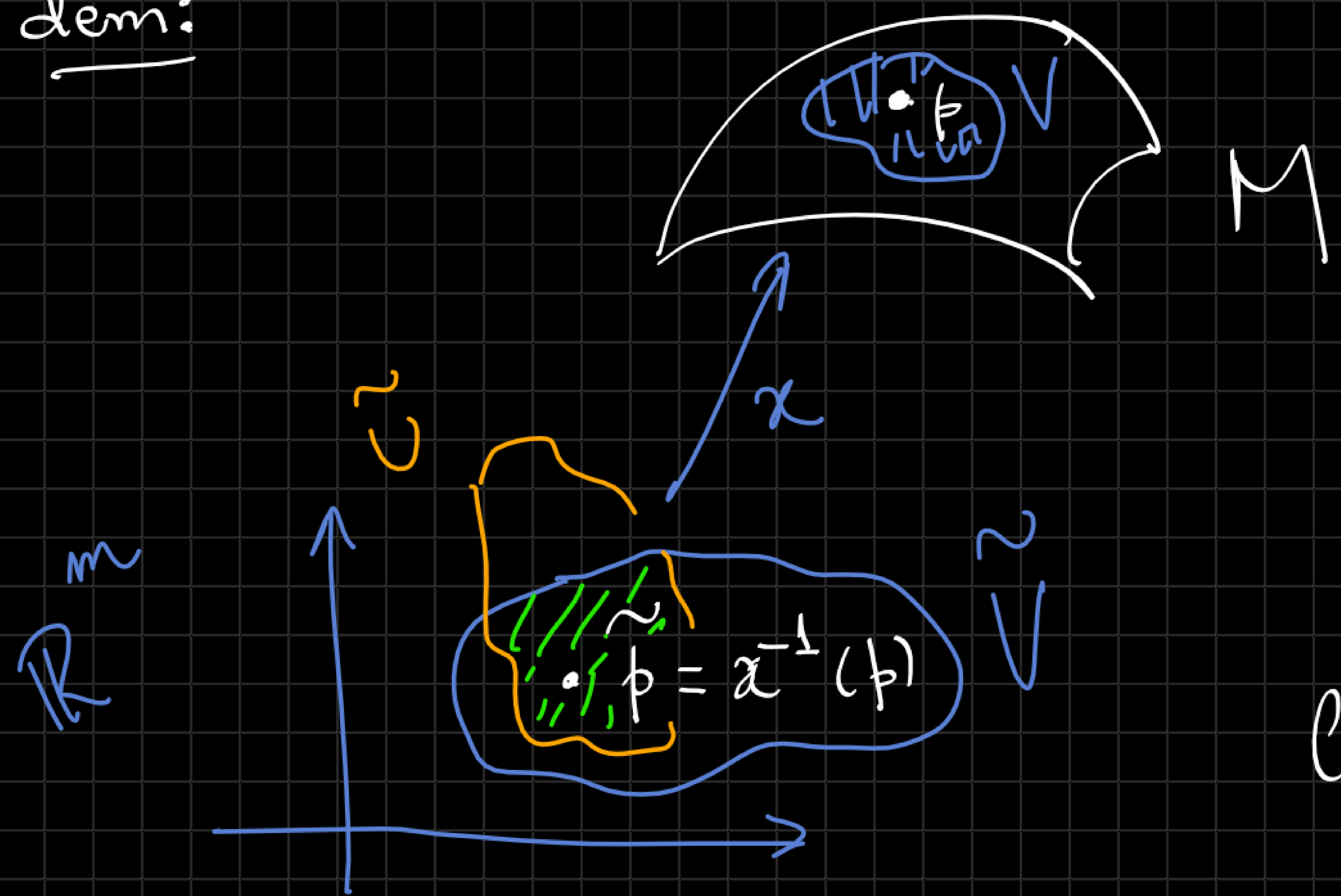
Existem: uma vizinhança $U \subset M$ de p, um intervalo $(-\delta, \delta) \subseteq \mathbb{R}$, $\delta > 0$, e uma aplicação diferenciável

$$\varphi : (-\delta, \delta) \times U \longrightarrow M$$
$$(t, q) \longmapsto \varphi(t, q)$$

t.q., para cada $q \in U$, a curva $t \mapsto \varphi(t,q)$ é a única curva tal que

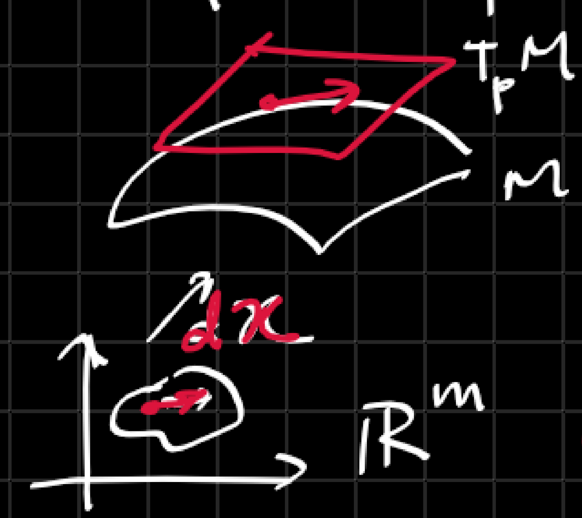
$$\begin{cases} \dfrac{\partial \varphi}{\partial t} = X(\varphi(t,q)) \\ \varphi(0,q) = q \end{cases}.$$

dem:



Sejam $\tilde{V}$ aberto de $\mathbb{R}^m$ e $x : \tilde{V} \longrightarrow V$ uma parametrização de M ao redor de p (com $V = x(\tilde{V})$). Chame por $\tilde{p} = x^{-1}(p)$.

Seja $\tilde{X}$ o seguinte campo em $\tilde{V} \subseteq \mathbb{R}^m$: $\forall \tilde{q} \in \tilde{V}$, defina $\tilde{X}(\tilde{q})$ por: $(dx_{\tilde{q}})^{-1}(X(x(\tilde{q})))$.



x difeo $\Rightarrow dx$ isomorfismo (aka Teo. Apli. Inv.)

Pelo Teorema de Picard-Lindelöf, existem vizinhança $\tilde{U} \subseteq \mathbb{R}^m$

de $\tilde{p}$, um intervalo $(-\delta,\delta) \subseteq \mathbb{R}$, com $\delta > 0$, e uma aplicação $\tilde{\varphi} : (-\delta,\delta) \times \tilde{U} \to \mathbb{R}^m$ tal que, para cada $\tilde{q} \in \tilde{U}$, a curva $t \mapsto \tilde{\varphi}(t,\tilde{q})$ é a única solução de $\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial t} = \tilde{X}(\tilde{\varphi}(t,\tilde{q}))$ com $\tilde{\varphi}(0,\tilde{q}) = \tilde{q}$.

Chame por $\tilde{W} = \tilde{V} \cap \tilde{U}$ e defina $W = x(\tilde{W})$ e $\varphi : (-\delta,\delta) \times W \to M$ por:

$$\varphi(t,q) = x(\tilde{\varphi}(t, x^{-1}(q))) . \quad ///$$

Uma curva $\alpha : (-\delta,\delta) \to M$ que satisfaz às condições $\alpha'(t) = X(\alpha(t))$ e $\alpha(0) = q$ é chamada a trajetória do campo X que passa por q para $t=0$.

Picard-Lindelöf $\Rightarrow$ para cada ponto de uma certa vizinhança passa uma única trajetória de X.

Dependência C^r, $r \geq 1$ nas condições iniciais em $\mathbb{R}^m$

$\Rightarrow$ $\varphi : (-\delta,\delta) \times U \to M$ é de classe C^r.

Denotamos $\varphi(t,q)$ por $\varphi_t(q)$ e chamamos $\varphi_t : U \to M$ de fluxo local de X.

No contexto das EDO's, o colchete $[X,Y]$ pode ser interpretado como uma derivação de Y ao longo das trajetórias de X.

<u>Proposição</u>: Sejam X, Y campos diferenciáveis de vetores em uma variedade diferenciável M, seja $p \in M$, e seja φ_t o fluxo local de X em uma vizinhança U de p. Então:

$$[X,Y](p) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}\left[Y - d\varphi_t Y\right](\varphi_t(p)).$$

<u>dem</u>: $\begin{cases} \text{do Carmo, p. 30} \\ \text{Tu, p. 225} \leftarrow \text{Teorema 20.4} \end{cases}$

O Manfredo faz uso do seguinte Lema:

<u>Lema</u>: Seja $h : (-\delta, \delta) \times U \to \mathbb{R}$ uma aplicação diferenciável com $h(0,q) = 0$, $\forall q \in U$. Então existe uma aplicação diferenciável $g : (-\delta, \delta) \times U \to \mathbb{R}$ com $h(t,q) = t \cdot g(t,q)$; em particular, $g(0,q) = \frac{\partial h}{\partial t}(t,q)\Big|_{t=0}$.

<u>dem</u>: Se $h(t,q) = t\, g(t,q)$, então:

$$g(0,q) = \lim_{t\to 0} g(t,q) = \lim_{t\to 0} \frac{h(t,q)}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{h(t,q) - 0}{t - 0}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{h(t,q) - h(0,q)}{t - 0}$$

$$= \frac{\partial}{\partial t} h(t,q)\Big|_{t=0}.$$

Vamos mostrar que existe tal g.

Para tanto, defina: $g(t,q) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\partial h(ts,q)}{\partial(ts)}\, ds$

$\Rightarrow g$ é diferenciável pois $s \in (0,1) \Rightarrow ts \in (-\delta,\delta)$.

Além disso, $tg(t,q) = t \cdot \displaystyle\int_0^1 \frac{\partial h(ts,q)}{\partial(ts)}\, ds$

$$= \int_0^1 \frac{\partial h(ts,q)}{\partial(ts)}\, t \cdot ds$$

$\tilde{s} = ts$

$d\tilde{s} = t\,ds$

$s=0 \to \tilde{s} = t\cdot 0 = 0$

$s=1 \to \tilde{s} = t\cdot 1 = t$

$$= \int_0^t \frac{\partial h(ts,q)}{\partial(ts)}\, d(ts)$$

$$= \int_0^t \frac{\partial h(\tilde{s},q)}{\partial\tilde{s}}\, d\tilde{s}$$

$$= h(t,q) - h(0,q)$$

$$= h(t,q) - 0 = h(t,q).\ ///$$